

下面的图中所作出的红色和绿色的球是与四个两两外切的球（蓝色）都相切的球，其中蓝色球半径由小到大分别是 a 、 b 、 c 、 d ， $b = 4$ ， $c = 5$ ， $d = 6$ 。需要满足 $2abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2$ 那些蓝色的球才会存在。

令 $\Delta = 2abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - (a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2)$ 。

图 1 中 $a = 3$ ，此时满足 $abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) < a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2$ ，这种情况下有一个球与蓝色球都外切（红色），球半径是 $\frac{2abcd}{abc + abd + acd + bcd + \sqrt{3\Delta}}$ ，有一个球与蓝色球都内切（绿色）， $\frac{2abcd}{-(abc + abd + acd + bcd) + \sqrt{3\Delta}}$ 。

图 2 中 $a = \frac{30}{19}(37 - \sqrt{1293})$ ，此时满足 $abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2$ ，这种情况下有一个球与蓝色球都外切（红色），球半径是 $\frac{2abcd}{abc + abd + acd + bcd}$ ，但无与蓝色球都内切的球，而有一个与蓝色球都相切的公切面（绿色）。

图 3 中 $a = 1$ ，此时满足 $abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) > a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2$ ，这种情况下有两个个球与蓝色球都外切（红色和绿色），球半径分别是 $\frac{2abcd}{abc + abd + acd + bcd - \sqrt{3\Delta}}$ 、 $\frac{2abcd}{abc + abd + acd + bcd + \sqrt{3\Delta}}$ 。

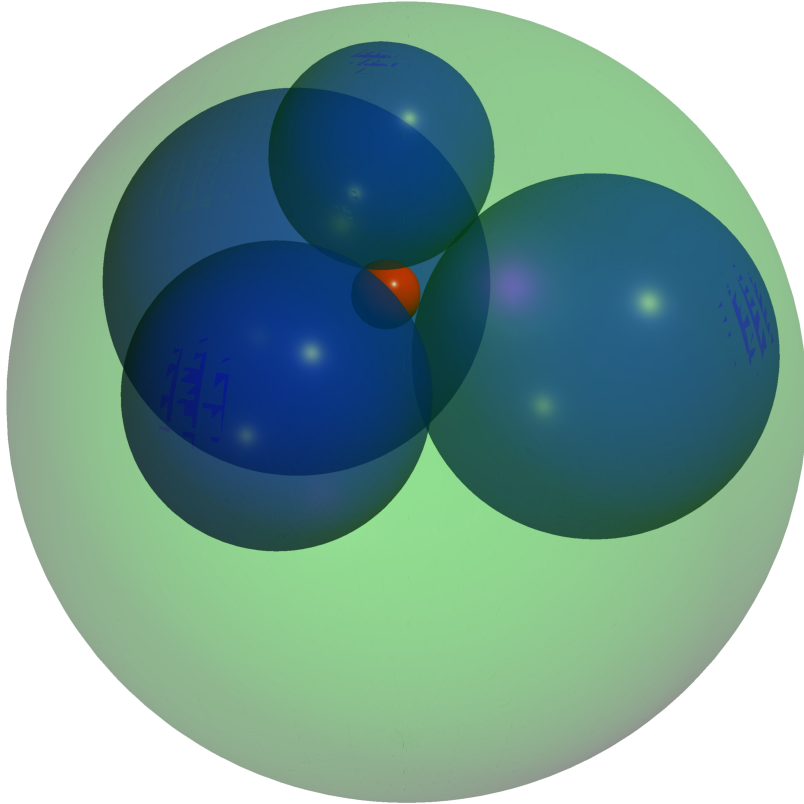


图 1

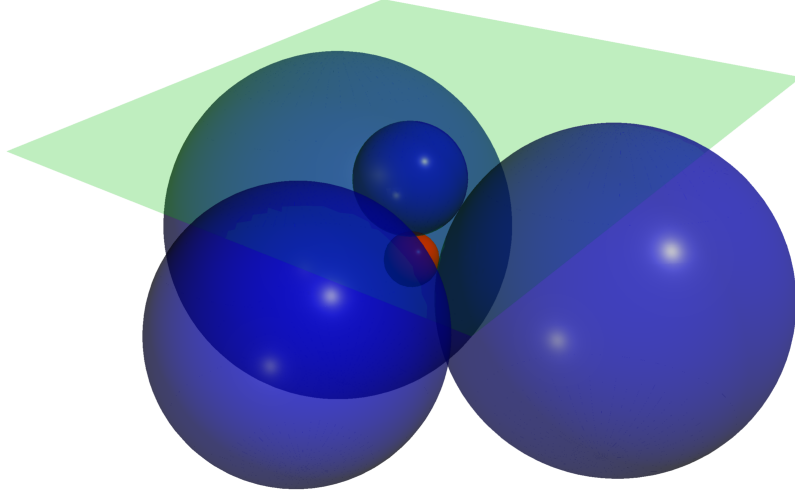


图 2

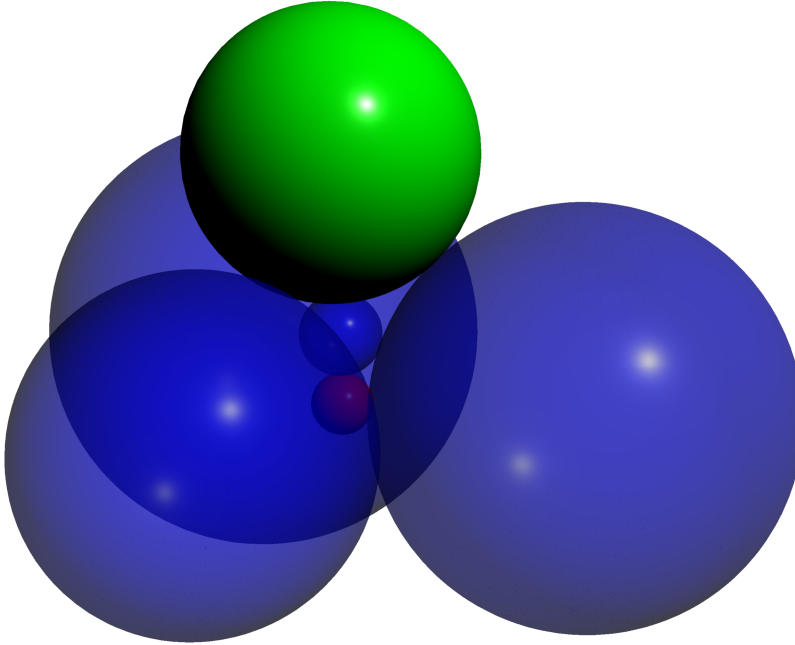


图 3

令 $\Delta' = 2abc(ab + ac + bc) - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. 若两两外切的三个球半径分别是 a 、 b 、 c ，则只有当 $2abc(a + b + c) \geq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ 时与这三个球都相切的平面才存在，否则必定有一球在另两个球的公切圆锥或公切圆柱内部，不存在与这三个球都相切的平面；若公切面与三球球心所确定的平面夹角是 θ ，则 $\cos \theta = \sqrt{\frac{\Delta'}{abc(a + b + c)}}$ ，仅当 $a = b = c$ 时公切面与三球球心所确定的平面平行；仅当 $2abc(ab + ac + bc) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ 时公切面与三球球心所确定的平面垂直. 若存在与这三个球都相切的平面，则当 a 、 b 、 c 不全相等时有两个球与与这三个球都相切且与公切面都相切，其半径分别是 $\frac{2abc}{ab + ac + bc + \sqrt{3\Delta'}}$ 、 $\frac{2abc}{ab + ac + bc - \sqrt{3\Delta'}}$ ；当 $a = b = c$ 时有两个球与与这三个球都相切且与公切面都相切，其半径是 $\frac{a}{3}$ ，另一球退化为另一个与三球都相切的公切面. 图 4、5 就是 $a = 2$ 、 $b = 4$ 、 $c = 6$ 时

的情形.

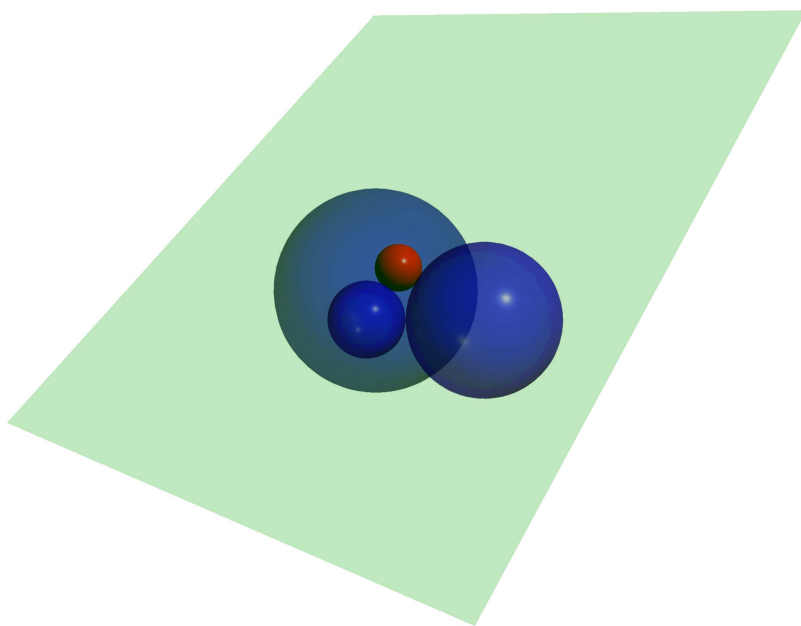


图 4

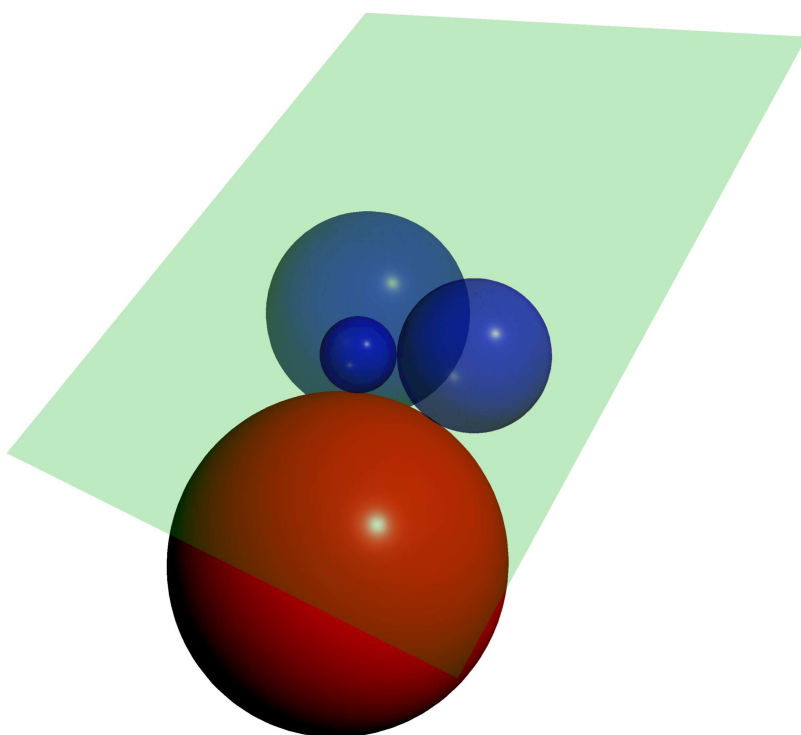


图 5