

均匀多面体的均匀复合多面体及其对偶复合多面体

何万程

2020 年 1 月 30 日

本文介绍均匀多面体的均匀复合多面体及其对偶复合多面体，这些复合多面体是由同一种均匀多面体复合构成的复合多面体，且满足各个独立的均匀多面体的位置分布都是相同的，复合多面体的顶点具有传递性。John Skilling 于 1976 年首次枚举了均匀多面体的均匀复合多面体，以及证明该枚举是完整的。

本文按 John Skilling 的枚举顺序枚举均匀多面体的均匀复合多面体。以下正 $\frac{p}{q}$ 角星表示正 p 边形每隔 $q-1$ 个顶点联一线段形成的 p 角星， $q=1$ 时表示正 p 边形。

(1) 自由旋转六联正四面体

该复合多面体是将一个正方体的其中一个内容正四面体变为重合的三对正四面体，每一对正四面体绕该正方体对面中心连线的对称轴（共三条对称轴）顺、逆时针旋转 θ ，最后形成的复合多面体。图 1、2、3 分别对应 θ 是 15° 、 30° 、 45° 的情形。自由旋转六联正四面体是自对偶的复合多面体

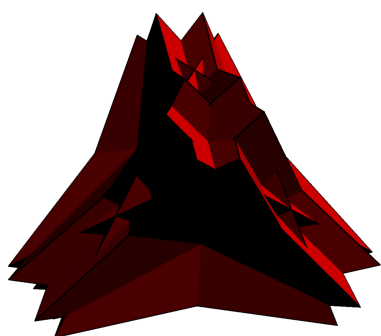


图 1

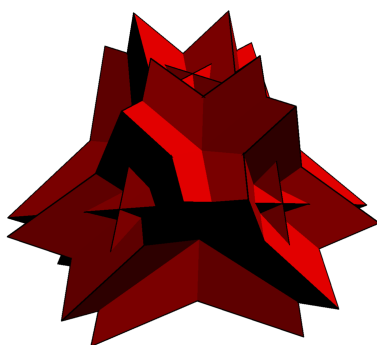


图 2

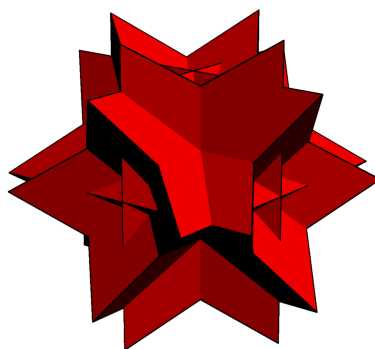


图 3

(2) 自由旋转十二联正四面体

该复合多面体是将六联正四面体及每个正四面体的对偶正四面体组合在一起形成的复合多面体。图 4、5、6 分别对应 θ 是 15° 、 30° 、 45° 的情形。

当 $\theta = 45^\circ$ 时，有一半的四面体重合，其形状与六联正四面体的形状一样。

自由旋转十二联正四面体是自对偶的复合多面体。

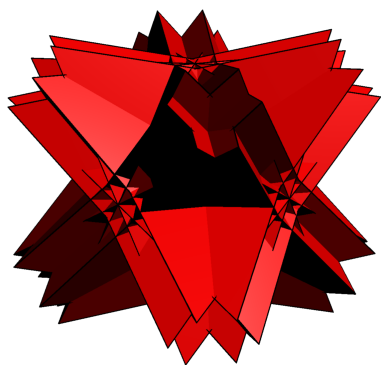


图 4

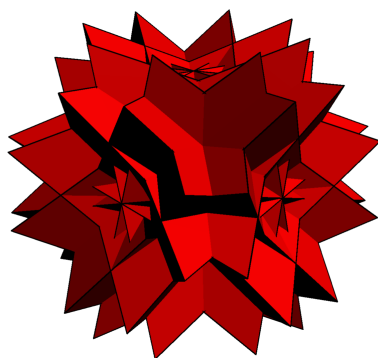


图 5

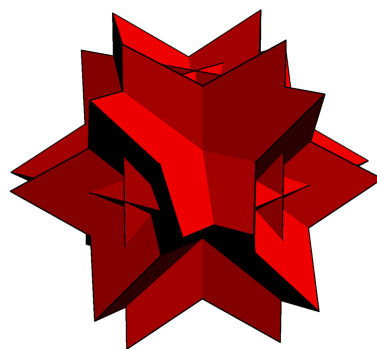


图 6

(3) 六联正四面体

该复合多面体是将正方体绕其对面中心连线的对称轴（共三条对称轴）旋转 45° ，得到的三个正方体里所有的内容正四面体所构成的复合多面体（图 7）。

六联正四面体是自对偶的复合多面体。

(4) 双正四面体

该复合多面体是由正四面体及其对偶正四面体构成的复合多面体（图 8）。

双正四面体是自对偶的复合多面体。

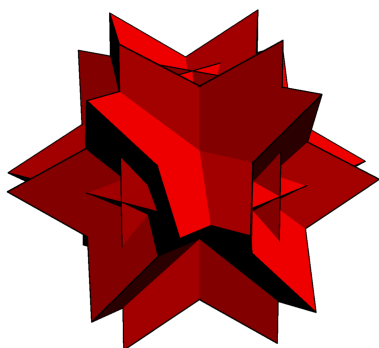


图 7

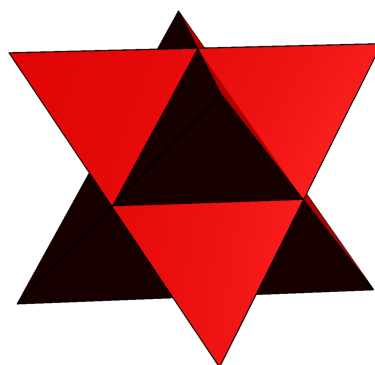


图 8

(5) 五联正四面体

该复合多面体是由正十二面体中其中的一个内容正四面体绕这个正十二面体对面中线连线的对称轴旋转 72° 、 144° 、 216° 、 288° ，共五个正四面体构成的复合多面体（图 9）。

五联正四面体的对偶复合多面体是旋转方向相反的五联正四面体（图 10）。

(6) 十联正四面体

该复合多面体是由过正十二面体同一顶点的两个内容正四面体绕这个正十二面体对面中线连线的对称轴旋转 72° 、 144° 、 216° 、 288° ，共十个正四面体构成的复合多面体（图 11）。

十联正四面体是自对偶的复合多面体。

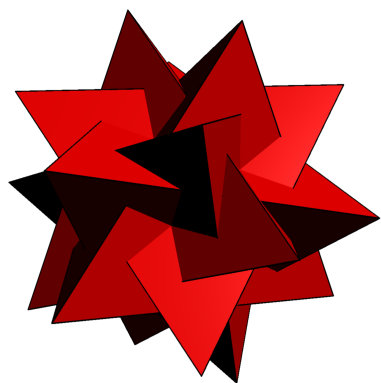


图 9

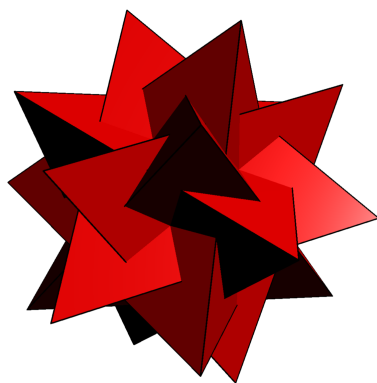


图 10

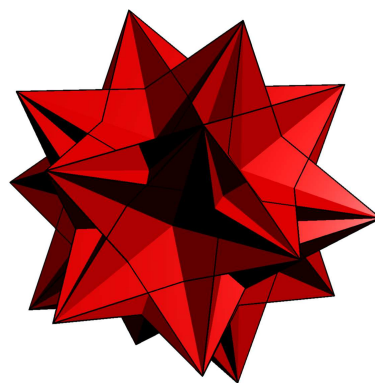


图 11

(7) 自由旋转六联正方体

该复合多面体是将六个重合的正方体的其中分成三对，每一对正方体绕原始正方体对面中心连线的对称轴（共三条对称轴）顺、逆时针旋转 θ ，最后形成的复合多面体。图 12、13、14 分别对应 θ 是 15° 、 30° 、 45° 的情形。

当 $\theta = 45^\circ$ 时，有一半的方体重合，其形状与三联正方体的形状一样。

自由旋转六联正方体的对偶复合多面体是自由旋转六联正八面体，图 12、13、14 的对偶复合多面体分别是图 15、16、17。

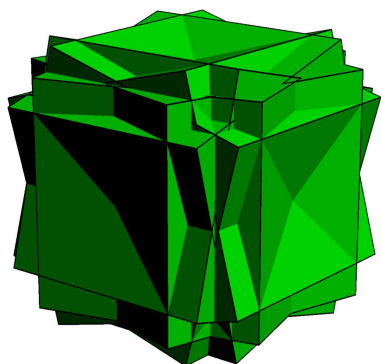


图 12

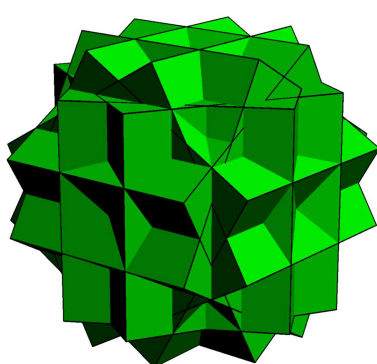


图 13

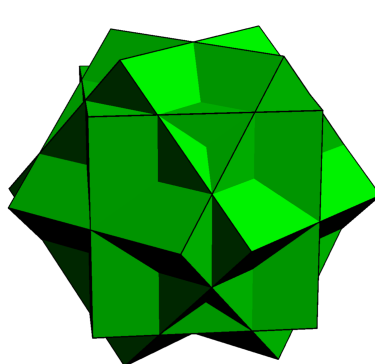


图 14



图 15

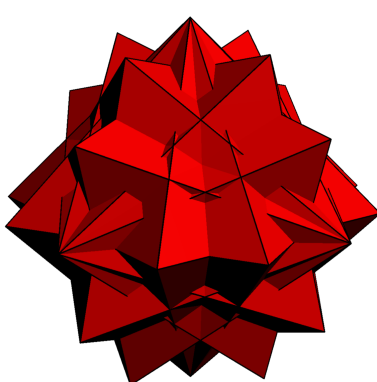


图 16

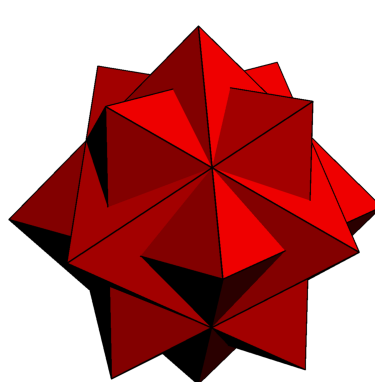


图 17

(8) 三联正方体

该复合多面体是将正方体绕其对面中心连线的对称轴（共三条对称轴）旋转 45° ，得到的三个正方体里所构成的复合多面体（图 18）。

三联正方体的对偶复合多面体是三联正八面体（图 19）。

(9) 五联正方体

该复合多面体是由正十二面体中的一个内容正方体绕这个正十二面体对面中线连线的对称轴旋转 72° 、 144° 、 216° 、 288° ，共五个正方体构成的复合多面体（图 20）。

五联正方体的对偶复合多面体是五联正八面体（图 45）。

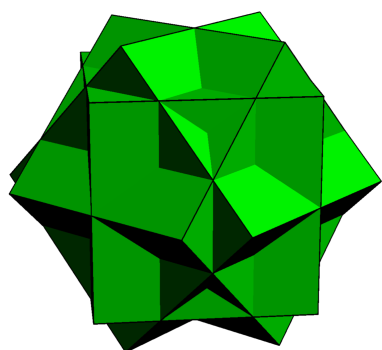


图 18

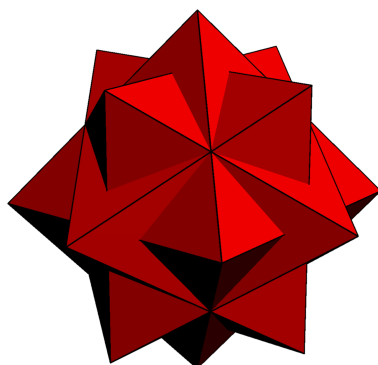


图 19

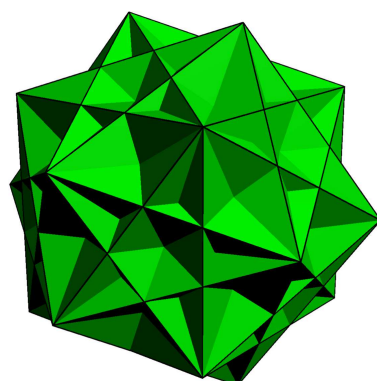


图 20

(10) 自由旋转四联正八面体

该复合多面体是将四个重合的正八面体绕原八面体以中心为起点与共点的四个原八面体的面的中心连线的射线（共八条射线），以这些射线为旋转轴方向，相邻面的旋转方向相反，相对面的旋转方向相同，旋转统一角度 θ 后形成的四个正八面体形成的复合多面体。图 21、22、23 分别对应 θ 是 30° 、 $\arccos \frac{3\sqrt{5}-1}{8}$ 、 60° 的情形。

其中角度和是 120° 时的形状是相同的。当 $\theta = 60^\circ$ 时是四联正八面体； $\theta = \arccos \frac{3\sqrt{5}-1}{8}$ 时候其中 24 个三角形形成共面对，是五联正八面体缺一正八面体的情形。

自由旋转四联正八面体的对偶复合多面体是自由旋转四联正方体，图 21、22、23 的对偶多面复合体分别是图 24、25、26。25 是五联正方体缺一正方体的情形，26 是四联正方体。

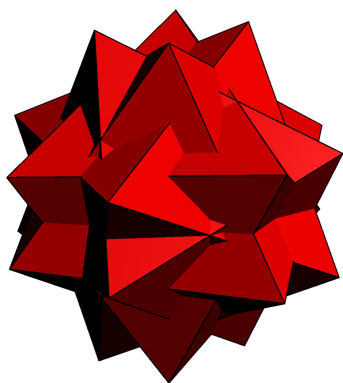


图 21

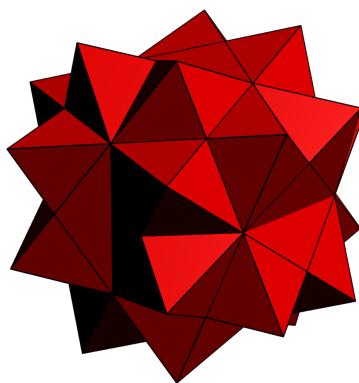


图 22

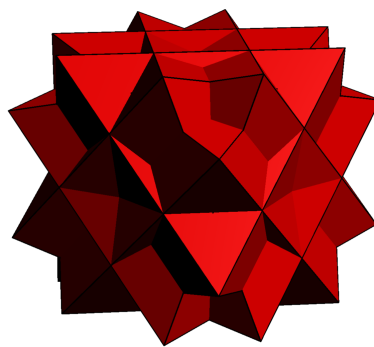


图 23

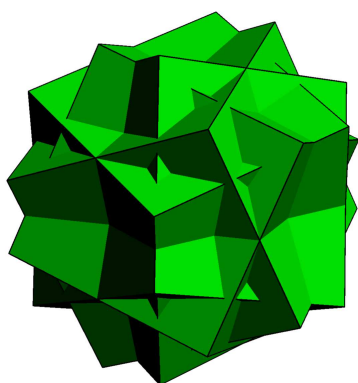


图 24

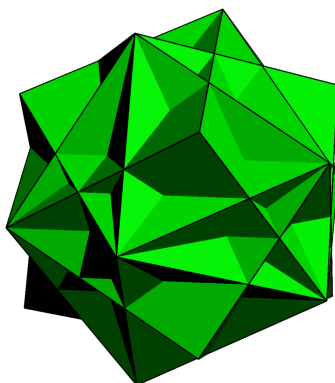


图 25

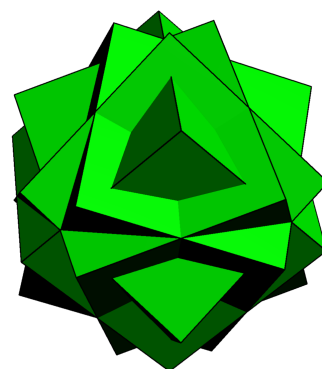


图 26

(11) 自由旋转八联正八面体

该复合多面体是将八个重合的正八面体分成四对，每一对的两个绕原八面体对面中心连线的轴（共四轴）分别逆时针和顺时针旋转角度 θ 后形成的四对共八个正八面体形成的复合多面体。图 27、28、29 分别对应 θ 是 30° 、 $\arccos \frac{3\sqrt{5}-1}{8}$ 、 60° 的情形。

其中角度和是 120° 时的形状是相同的。当 $\theta = 60^\circ$ 时与四联正八面体形状相同； $\theta = \arccos \frac{3\sqrt{5}-1}{8}$ 时其中 48 个三角形形成共面对。

自由旋转四联正八面体的对偶复合多面体是自由旋转四联正方体，图 27、28、29 的对偶多面复合体分别是图 30、31、32。

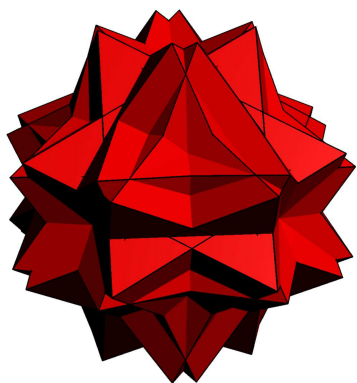


图 27

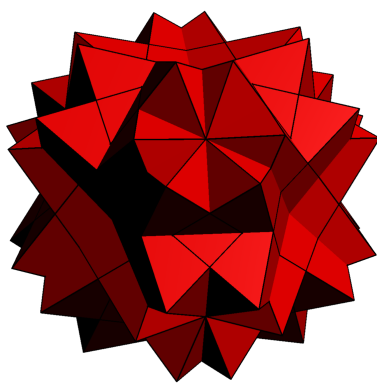


图 28

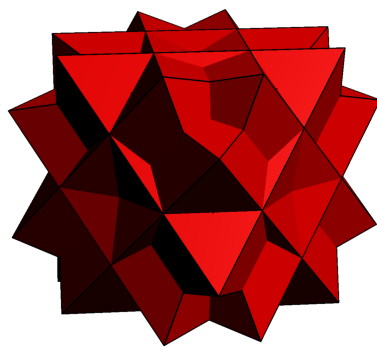


图 29

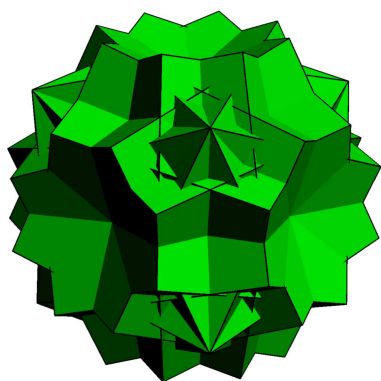


图 30

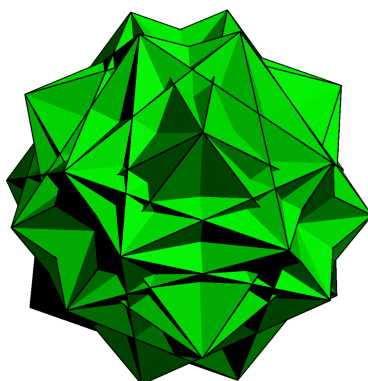


图 31

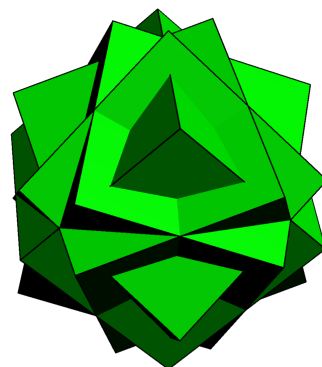


图 32

(12) 四联正八面体

该复合多面体是将四个重合的正八面体绕原八面体以中心为起点与共点的四个原八面体的面的中心连线的射线（共八条射线），以这些射线为旋转轴方向，相邻面的旋转方向相反，相对面的旋转方向相同，旋转统一角度 60° 后形成的四个正八面体形成的复合多面体（图 23）。

四联正八面体的对偶复合多面体是四联正方体（图 26）。

(13) 自由旋转二十联正八面体

该复合多面体是将两个重合的第二类十联正八面体（具体参考其对应的构造，使用第一类十联正八面体亦可）分成十对，选取五个顶点共面，且与复合多面体中心和该面中心所连的线段相交的面的中心为终点、复合多面体中心为起点相连成射线，每对含上述对应这个面的正八面体绕上述构造的射线分别逆时针、顺时针旋转 θ ，最后形成的二十个正八面体形成的复合多面体。图 33、34、35 分别对应 θ 是 10° 、 $\arccos \frac{1}{124} \sqrt{10882 - 1638\sqrt{5} + 6\sqrt{437770 + 193690\sqrt{5}}}$ （此时的顶点是大削棱正十二面体的顶点）、 50° 的情形。

当 $\theta = 0^\circ$ 时是两个重合的第二类十连正八面体，当 $\theta = 60^\circ$ 时是两个重合的第一类十连正八面体，当 $\theta = \arccos \frac{1}{4} \sqrt{6\sqrt{5} - 2 + 6\sqrt{10\sqrt{5} - 22}}$ 是二十联正八面体，当 $\theta = \arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$ 是四个重合的五联正八面体。

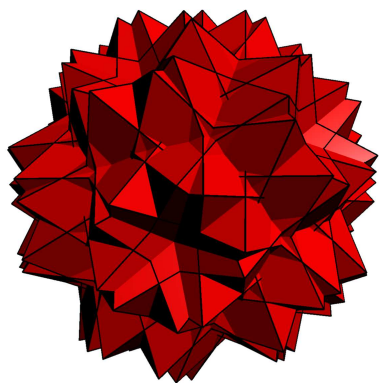


图 33

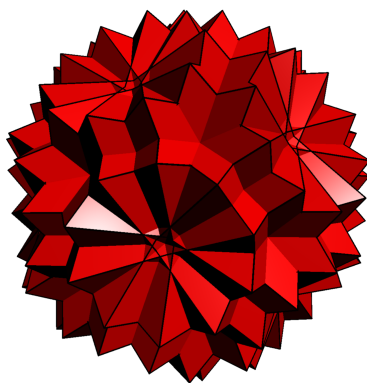


图 34

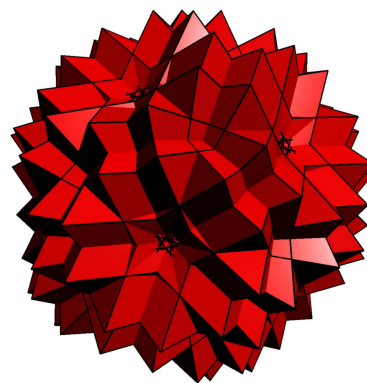


图 35

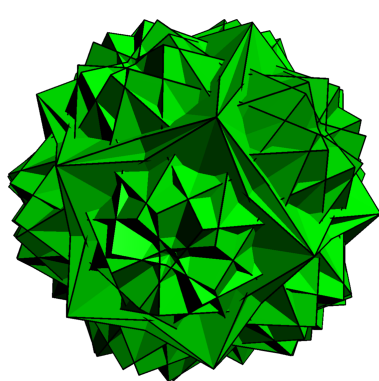


图 36

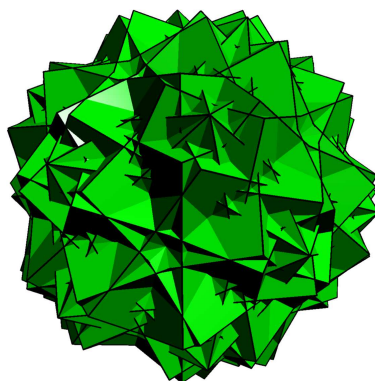


图 37

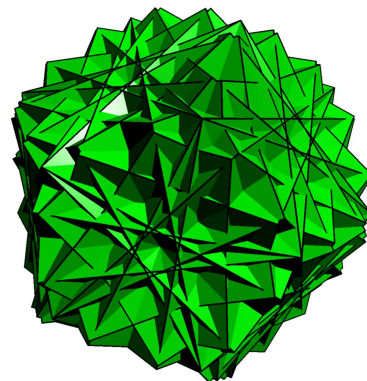


图 38

(14) 二十联正八面体

该复合多面体是自由旋转二十联正八面体 $\theta = \arccos \frac{1}{4} \sqrt{6\sqrt{5} - 2 + 6\sqrt{10\sqrt{5} - 22}}$ 的情形 (图 39), 其中成对的八面体顶点重合, 其所有顶点与大扭棱十二合三十二面体、大双斜方三十二面体、大二重变形二重斜方十二面体的顶点相同.

两个镜像全等的大扭棱十二合三十二面体使它们的正五角星配对全部重合时, 剩下的三角形面便构成了二十联正八面体.

二十联正八面体的对偶复合多面体是二十联正方体 (图 40), 二十联正方体的表面与二联大六角六十面体 (图 183) 的表面相同.

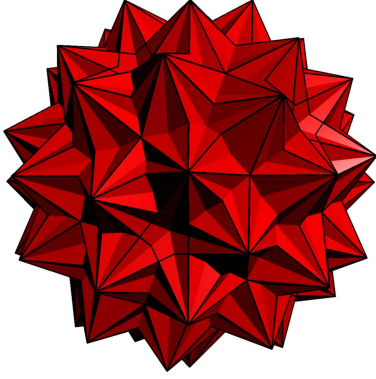


图 39

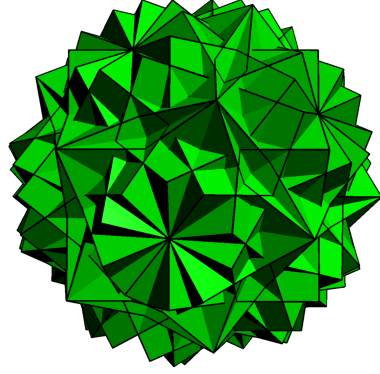


图 40

(15) 第一类十联正八面体

该复合多面体由十个正八面体放置在具有正二十面体的对称性的位置中组成 (图 41). 设 $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率, $s = -1$, 则该复合多面体的所有顶点由以下坐标组成 (\pm 任意取 + 或 -, 坐标可与下面的坐标相同或成循环排列):

$$\begin{aligned} & (0, \pm(\rho^{-1}\sqrt{2} + 2s\rho), \pm(\rho\sqrt{2} - 2s\rho^{-1})), \\ & (\pm(\sqrt{2} - s\rho^2), \pm(\sqrt{2} + s(2\rho - 1)), \pm(\sqrt{2} + s\rho^{-2})), \\ & (\pm(\rho^{-1}\sqrt{2} - s\rho), \pm(\rho\sqrt{2} + s\rho^{-1}), \pm 3s). \end{aligned}$$

第一类十联正八面体选取五个顶点共面, 且与复合多面体中心和该面中心所连的线段相交的面的中心为终点、复合多面体中心为起点相连成射线, 每个含上述对应这个面的正八面体绕上述构造的射线分别旋转 60° 后便构成第二类十联正八面体.

第一类十联正八面体的对偶复合多面体是第一类十联正方体 (图 42).

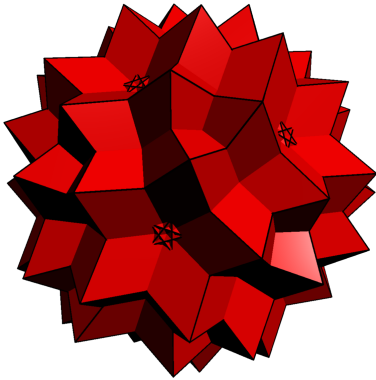


图 41

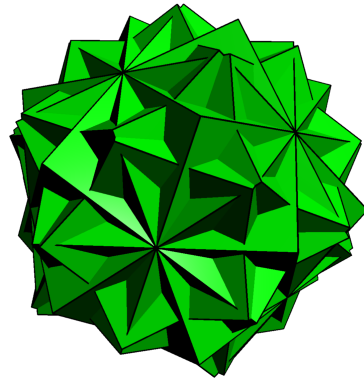


图 42

(16) 第二类十联正八面体

该复合多面体由十个正八面体放置在具有正二十面体的对称性的位置中组成 (图 43). 设 $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率, $s = 1$, 则该复合多面体的所有顶点由以下坐标组成 (\pm 任意取 + 或 -, 坐标可与下面的

坐标相同或成循环排列):

$$\begin{aligned} & (0, \pm(\rho^{-1}\sqrt{2} + 2s\rho), \pm(\rho\sqrt{2} - 2s\rho^{-1})), \\ & (\pm(\sqrt{2} - s\rho^2), \pm(\sqrt{2} + s(2\rho - 1)), \pm(\sqrt{2} + s\rho^{-2})), \\ & (\pm(\rho^{-1}\sqrt{2} - s\rho), \pm(\rho\sqrt{2} + s\rho^{-1}), \pm 3s). \end{aligned}$$

第二类十联正八面体选取五个顶点共面，且与复合多面体中心和该面中心所连的线段相交的面的中心为终点、复合多面体中心为起点相连成射线，每个含上述对应这个面的正八面体绕上述构造的射线分别旋转 60° 后便构成第一类十联正八面体。

第二类十联正八面体的对偶复合多面体是第二类十联正方体（图 44）。

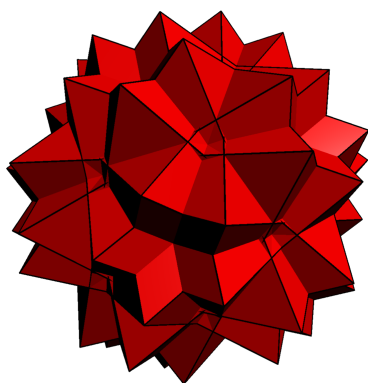


图 43

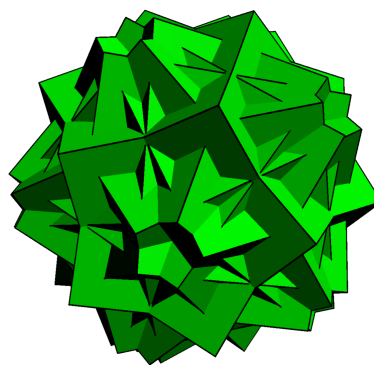


图 44

(17) 五联正八面体

该复合多面体由五联正方体中所有正方体构造其对偶正八面体构成（图 45）。其所有顶点是截半正十二面体的顶点。

五联正八面体的对偶复合多面体是五联正方体（图 20）。

(18) 五联四合四面体

该复合多面体由五联正八面体的每个正八面体构造四合四面体构成，构造时要保证每个面的构成相同（图 46）。其所有顶点是截半正十二面体的顶点。

五联四合四面体的对偶复合多面体是五联三合柱状化正方体（图 47）。

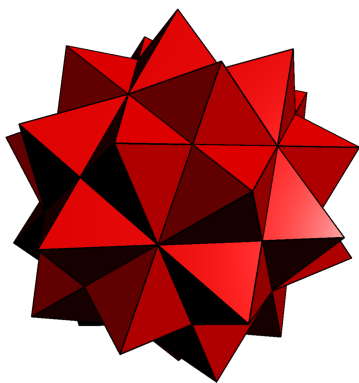


图 45

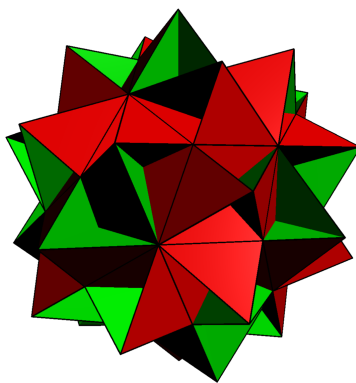


图 46

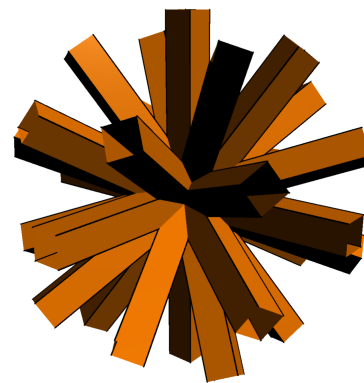


图 47

(19) 二十联四合四面体

该复合多面体由二十联正八面体的每个正八面体构造四合四面体构成，构造时要保证每个面的构成相同（图 48）。其所有顶点与大扭棱十二合三十二面体、大双斜方三十二面体、大二重变形二重斜方十二面体的顶点相同。

二十联四合四面体的对偶复合多面体是二十联三合柱状化正方体（图 49），二十联三合柱状化正方体的表面形状与大柱状化双斜方三十二面体、大柱状化二重变形二重斜方十二面体的表面形状相同。

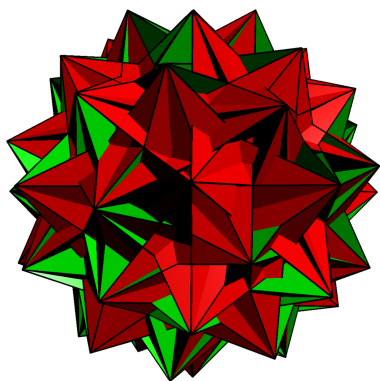


图 48

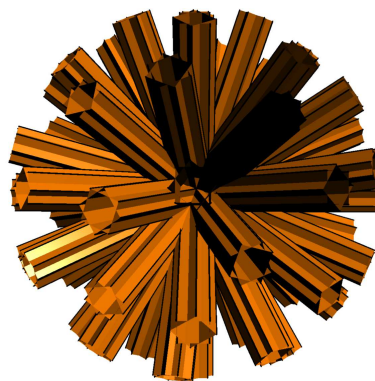


图 49

(20) 自由旋转 $2n$ 联正棱柱

该复合多面体是将两个重合的 n 联正 $\frac{p}{q}$ 角星棱柱（具体参考其对应的构造）绕上下底面中心连线所成的轴分别逆时针顺时针旋转 θ 形成的两个 n 联正棱柱构成。图 50 是 $n=4$, $p=4$, $q=1$, $\theta=3^\circ$ 的情形；图 51 是 $n=3$, $p=5$, $q=1$, $\theta=4^\circ$ 的情形；图 52 是 $n=2$, $p=7$, $q=3$, $\theta=4^\circ$ 的情形。

自由旋转 $2n$ 联正棱柱的对偶复合多面体是自由旋转 $2n$ 联正双棱锥或自由旋转 $2n$ 联正多角星棱锥，图 50、图 51、图 52 的对偶复合多面体分别是图 53、图 54、图 55。

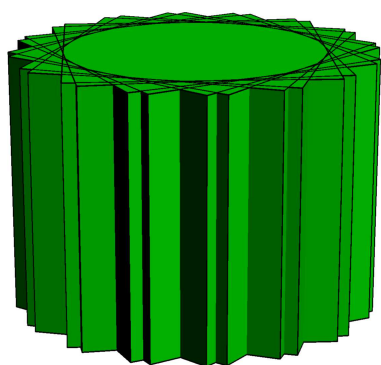


图 50

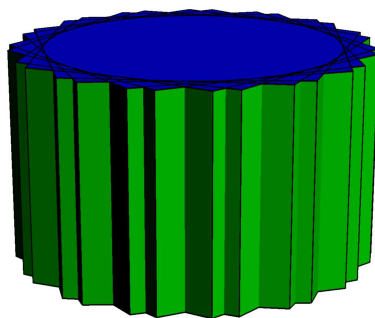


图 51

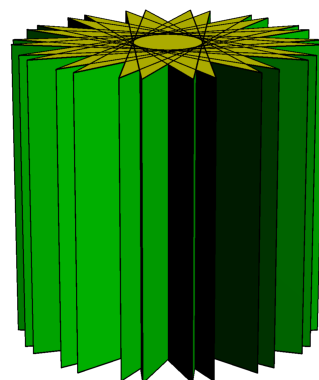


图 52

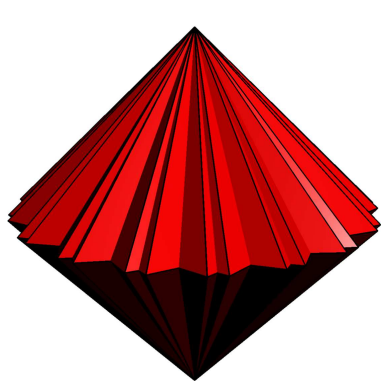


图 53

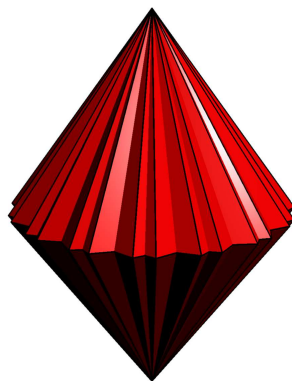


图 54



图 55

(21) n 联正棱柱

该复合多面体是将 n 个重合的正 $\frac{p}{q}$ 角星棱柱一个不动, 其他逐个绕上下底面中心连线沿相同方向分别旋转 θ 、 2θ 、 \dots 、 $(n-1)\theta$, 其中 $\theta = \frac{360^\circ}{np}$, 最后的 n 个正 $\frac{p}{q}$ 角星棱柱构成. 图 56 是 $n=4$, $p=4$, $q=1$ 的情形; 图 57 是 $n=3$, $p=5$, $q=1$ 的情形; 图 58 是 $n=2$, $p=7$, $q=3$ 的情形.

n 联正棱柱的对偶复合多面体是 n 联正双棱锥或 n 联正多角星棱锥, 图 56、图 57、图 58 的对偶复合多面体分别是图 59、图 60、图 61.

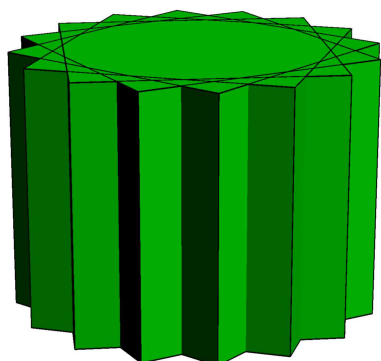


图 56

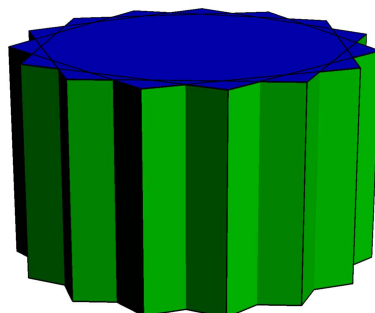


图 57

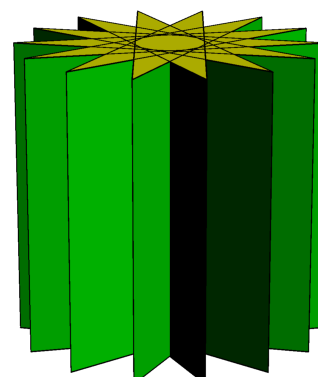


图 58



图 59

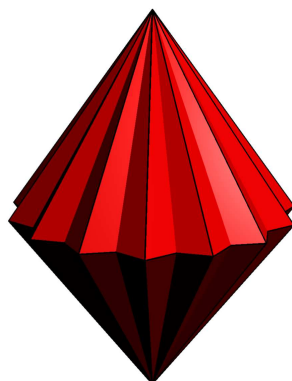


图 60



图 61

(22) 自由旋转 $2n$ 联奇数型正反柱

该复合多面体是将两个重合的 n 联正 $\frac{p}{q}$ 角星奇数型反柱（具体参考其对应的构造）绕上下底面中心连线所成的轴分别逆时针顺时针旋转 θ 形成的两个 n 联正反柱构成. 图 62 是 $n = 3, p = 5, q = 1, \theta = 4^\circ$ 的反柱情形；图 63 是 $n = 3, p = 7, q = 3, \theta = 2^\circ$ 的反柱情形；图 64 是 $n = 3, p = 8, q = 3, \theta = 2^\circ$ 的交错反柱情形；图 65 是 $n = 5, p = 2, q = 1, \theta = 5^\circ$ 的正四面体复合情形.

自由旋转 $2n$ 联奇数型正反柱的对偶复合多面体是自由旋转 $2n$ 联奇数型正偏方体、自由旋转 $2n$ 联奇数型正多角星偏方体、自由旋转 $2n$ 联奇数型凹正多角星偏方体或自由旋转 $2n$ 联奇数型正四面体. 图 62、图 63、图 64 的对偶复合多面体分别是图 66、图 67、图 68，图 65 是自对偶复合多面体.

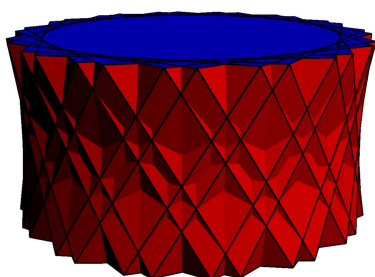


图 62

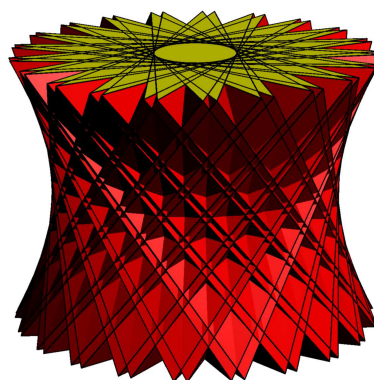


图 63

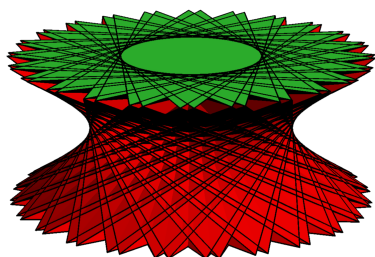


图 64

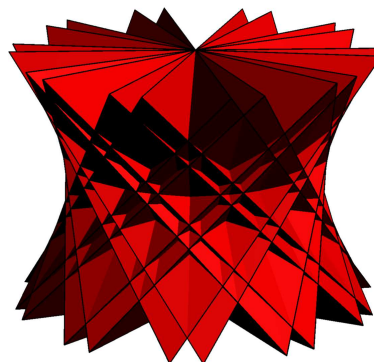


图 65

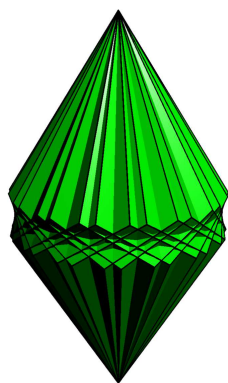


图 66

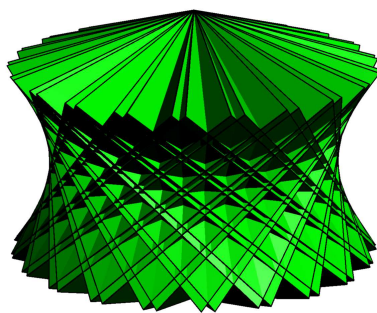


图 67

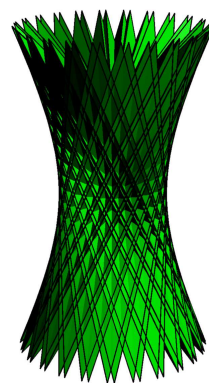


图 68

(23) n 联奇数型正反柱

该复合多面体是将 n 个重合的正 $\frac{p}{q}$ 角星反柱或交错反柱一个不动, 其他逐个绕上下底面中心连线沿相同方向分别旋转 θ 、 2θ 、 \dots 、 $(n-1)\theta$, 其中 $\theta = \frac{360^\circ}{np}$, 最后的 n 个正 $\frac{p}{q}$ 角星反柱或交错反柱构成. 反柱时 nq 是奇数; 交错反柱时 $n(p-q)$ 是奇数; 当 $p = 2q$ 时可看作底面是 q 条对角线构成的反柱, 此反柱由 q 个正四面体构成, 此时 nq 是奇数.

图 69 是 $n = 3$, $p = 5$, $q = 1$ 的反柱情形; 图 70 是 $n = 3$, $p = 7$, $q = 3$ 的反柱情形; 图 71 是 $n = 3$, $p = 8$, $q = 3$ 的交错反柱情形; 图 72 是 $n = 5$, $p = 2$, $q = 1$ 的正四面体复合情形.

n 联奇数型正反柱的对偶复合多面体是 n 联奇数型正偏方体、 n 联奇数型正多角星偏方体、 n 联奇数型凹正多角星偏方体或 n 联奇数型正四面体. 图 69、图 70、图 71 的对偶复合多面体分别是图 73、图 74、图 75, 图 72 是自对偶复合多面体.

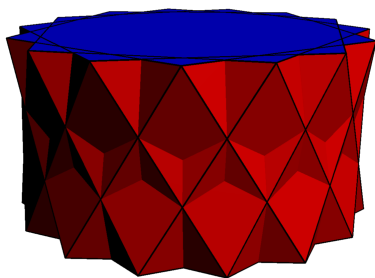


图 69

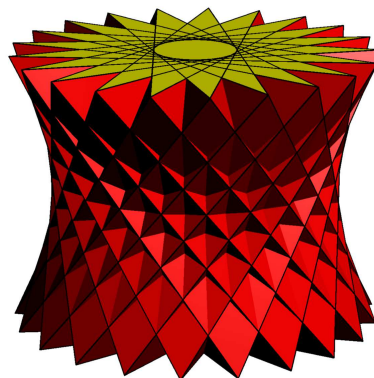


图 70

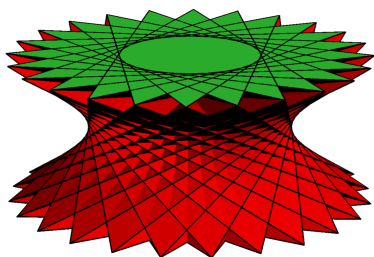


图 71

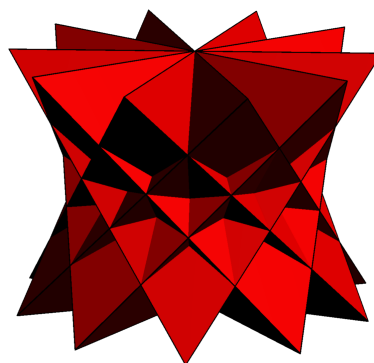


图 72

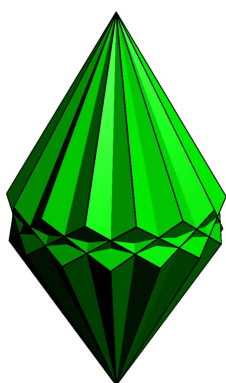


图 73

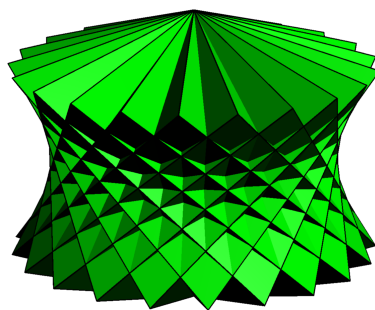


图 74

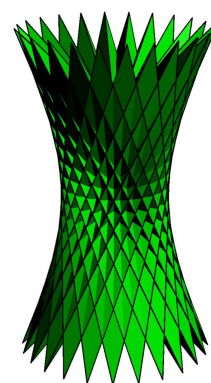


图 75

(24) 自由旋转 $2n$ 联偶数型正反柱

该复合多面体是将两个重合的 n 联正 $\frac{p}{q}$ 角星偶数型反柱（具体参考其对应的构造）绕上下底面中心连线所成的轴分别逆时针顺时针旋转 θ 形成的两个 n 联正反柱构成. 图 76 是 $n = 3, p = 9, q = 4, \theta = 2^\circ$ 的反柱情形；图 77 是 $n = 4, p = 7, q = 3, \theta = 2^\circ$ 的交错反柱情形；图 78 是 $n = 6, p = 2, q = 1, \theta = 10^\circ$ 的正四面体复合情形.

自由旋转 $2n$ 联偶数型正反柱的对偶复合多面体是自由旋转 $2n$ 联偶数型正偏方体、自由旋转 $2n$ 联偶数型正多角星偏方体、自由旋转 $2n$ 联偶数型凹正多角星偏方体或自由旋转 $2n$ 联偶数型正四面体. 图 76、图 77 的对偶复合多面体分别是图 79、图 80，图 78 是自对偶复合多面体.

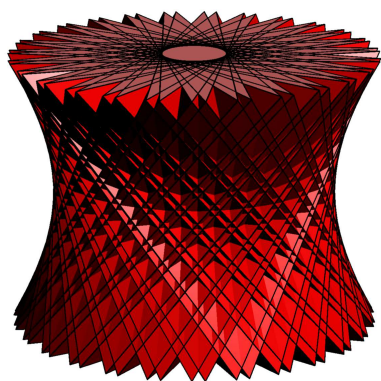


图 76

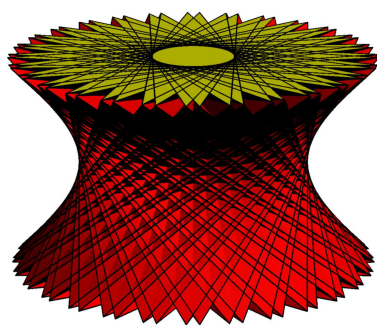


图 77

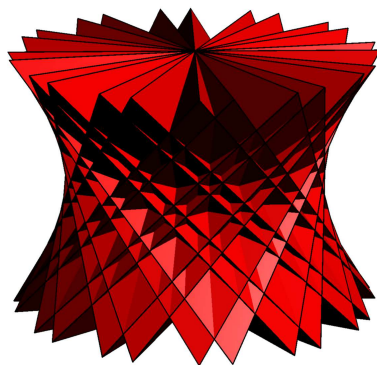


图 78

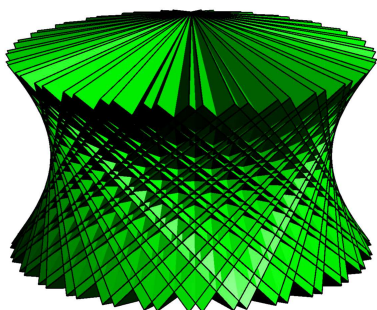


图 79

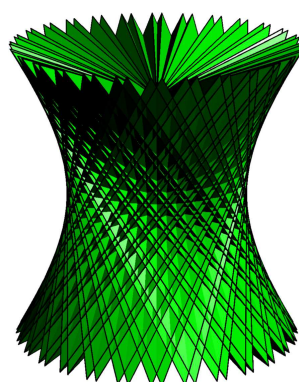


图 80

(25) n 联偶数型正反柱

该复合多面体是将 n 个重合的正 $\frac{p}{q}$ 角星反柱或交错反柱一个不动, 其他逐个绕上下底面中心连线沿相同方向分别旋转 θ 、 2θ 、 \dots 、 $(n-1)\theta$, 其中 $\theta = \frac{360^\circ}{np}$, 最后的 n 个正 $\frac{p}{q}$ 角星反柱或交错反柱构成. 反柱时 nq 是偶数; 交错反柱时 $n(p-q)$ 是偶数; 当 $p = 2q$ 时可看作底面是 q 条对角线构成的反柱, 此反柱由 q 个正四面体构成, 此时 nq 是偶数.

图 81 是 $n = 3$, $p = 9$, $q = 4$ 的反柱情形; 图 82 是 $n = 4$, $p = 7$, $q = 3$ 的交错反柱情形; 图 83 是 $n = 6$, $p = 2$, $q = 1$ 的正四面体复合情形.

n 联偶数型正反柱的对偶复合多面体是 n 联偶数型正偏方体、 n 联偶数型正多角星偏方体、 n 联偶数型凹正多角星偏方体或 n 联偶数型正四面体. 图 81、图 82 的对偶复合多面体分别是图 84、图 85, 图 83 是自对偶复合多面体.

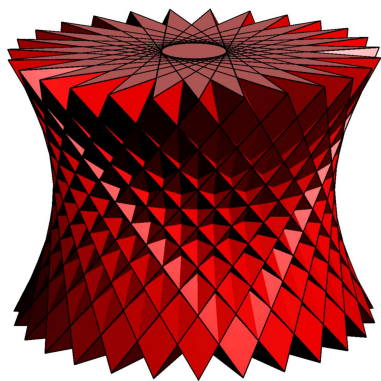


图 81

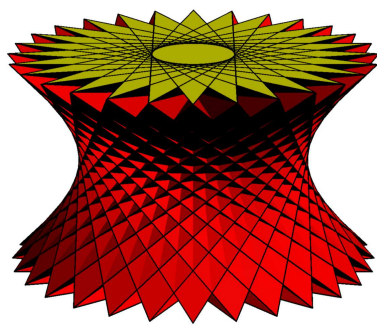


图 82

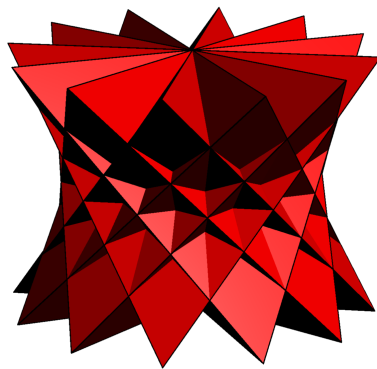


图 83

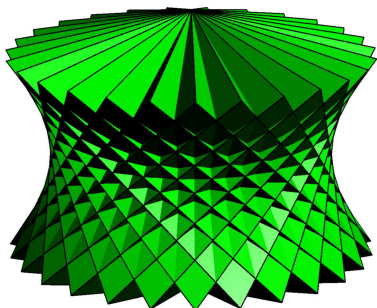


图 84

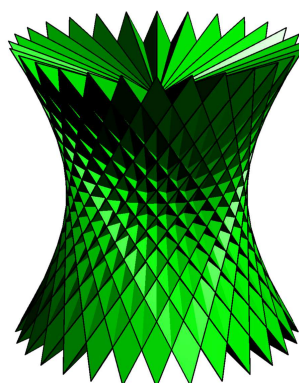


图 85

(26) 自由旋转十二联正五反柱

该复合多面体是将的十二个共六对的正五反柱每对正五反柱放在同一正十二面体内，不同对的位置不同，将每对正五反柱绕原正五反柱的上下底面中心连线的轴分别逆时针顺时针旋转 θ ，最后形成的正五反柱构成。图 86 是 $\theta = 20^\circ$ 的情形，当 $\theta = 36^\circ$ 时有六对正五反柱重合，其形状与六联正五反柱的形状相同。

自由旋转十二联正五反柱的对偶复合多面体是自由旋转十二联正五偏方体，图 86 的对偶复合多面体是图 87。

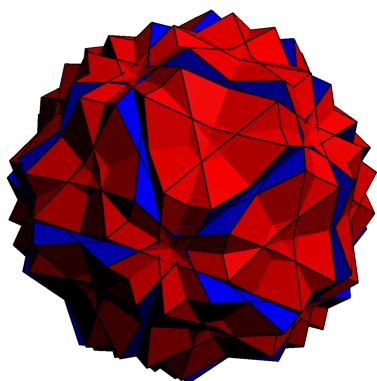


图 86

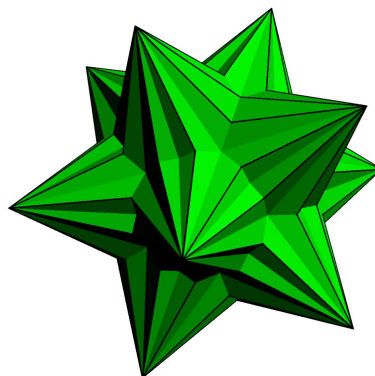


图 87

(27) 六联正五反柱

该复合多面体是将的六个的正五反柱放在同一正十二面体内，其位置不同，将每个正五反柱绕原正五反柱的上下底面中心连线的轴分别旋转 36° ，最后形成的正五反柱构成（图 88）.

六联正五反柱的对偶复合多面体是六联正五偏方体（图 89）.

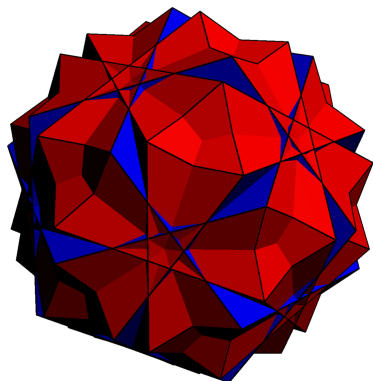


图 88

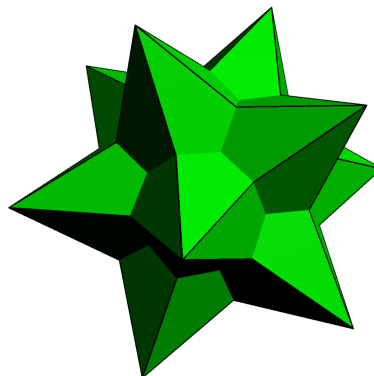


图 89

(28) 自由旋转十二联正五角星交错反柱

该复合多面体是将的十二个共六对的正五角星交错反柱每对正五反柱放在同一小星状正十二面体内，不同对的位置不同，将每对正五角星反柱绕原正五交错反柱的上下底面中心连线的轴分别逆时针顺时针旋转 θ ，最后形成的正五角星交错反柱构成. 图 90 是 $\theta = 20^\circ$ 的情形，当 $\theta = 36^\circ$ 时有六对正五交错反柱重合，其形状与六联正五角星交错反柱的形状相同.

自由旋转十二联正五角星交错反柱的对偶复合多面体是自由旋转十二联正五角星凹偏方体，图 90 的对偶复合多面体是图 91.

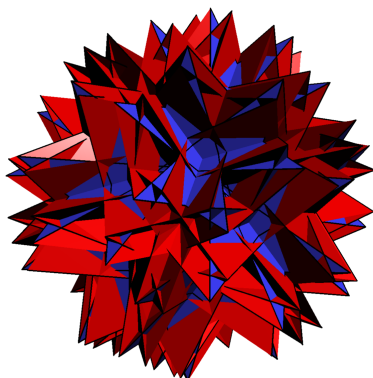


图 90

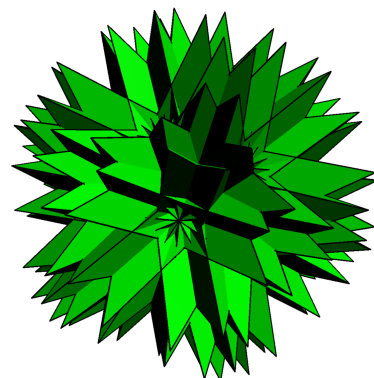


图 91

(29) 六联正五角星交错反柱

该复合多面体是将六个的正交错五角星反柱放在同小星状正十二面体内，其位置不同，将每个正五反柱绕原正五角星反柱的上下底面中心连线的轴分别旋转 36° ，最后形成的正五角星交错反柱构成（图 92）.

六联正五角星交错反柱的对偶复合多面体是六联正五角星凹偏方体（图 93）.

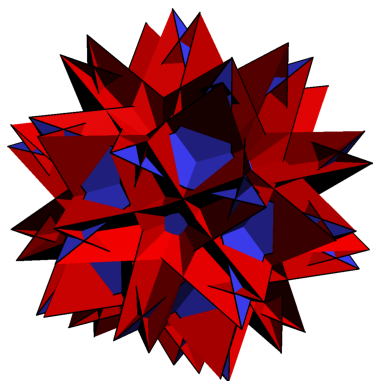


图 92

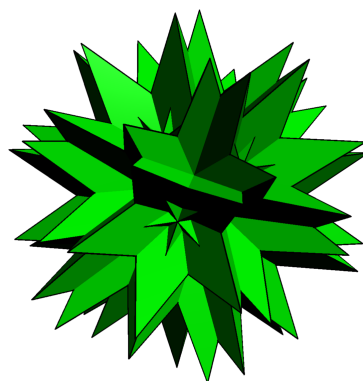


图 93

(30) 四联正三棱柱

该复合多面体是将四个正三棱柱放在具有正八面体对称性的位置上而构成 (图 94). 该复合多面体经过适当变换后, 其所有顶点由下面的点构成, 其中原坐标经过奇数次排列后前面的 \pm 的负号共有奇数个, 偶数次排列后前面的 \pm 的负号共有偶数个:

$$(\pm 1, \pm(1 + \sqrt{2}), \pm(1 - \sqrt{2})).$$

四联正三棱柱的对偶复合多面体是四联正三双棱锥 (图 95).

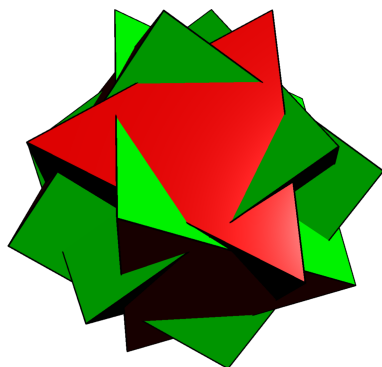


图 94



图 95

(31) 八联正三棱柱

该复合多面体是将两个镜像全等的四联正三棱柱使每对正三角形所在面重合而构成 (图 96). 八联正三棱柱的对偶复合多面体是八联正三双棱锥 (图 95).

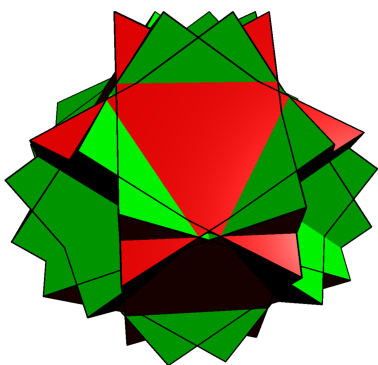


图 96



图 97

(32) 十联正三棱柱

该复合多面体是将十个正三棱柱放在具有正二十面体对称性的位置上而构成 (图 98). 该复合多面体的所有顶点与斜方十二合十二面体、三十二合十二面体、斜方二十面体的顶点相同.

十联正三棱柱的对偶复合多面体是十联正三双棱锥 (图 99).

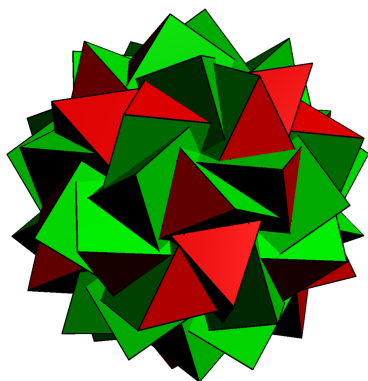


图 98

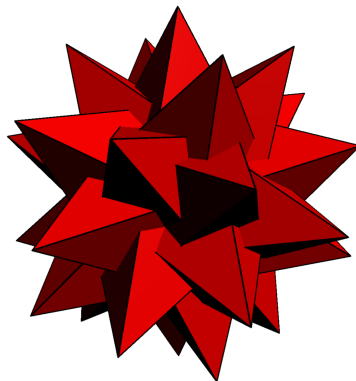


图 99

(33) 二十联正三棱柱

该复合多面体是将两个镜像全等的十联正三棱柱使每对正三角形所在面重合而构成 (图 100).

二十联正三棱柱的对偶复合多面体是二十联正三双棱锥 (图 101).

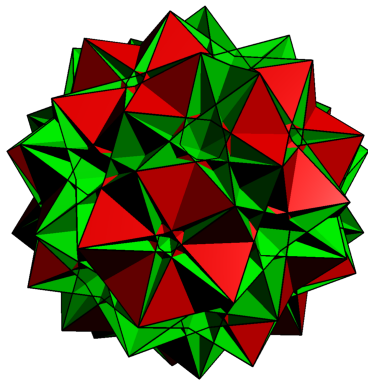


图 100

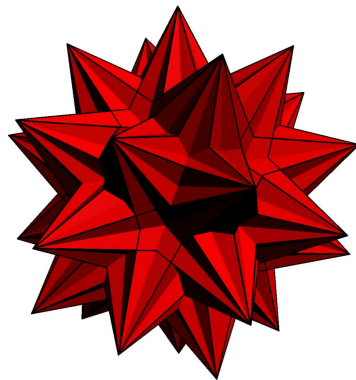


图 101

(34) 六联正五棱柱

该复合多面体是将六个正五棱柱放在具有正十二面体对称性的位置上而构成 (图 102). 该复合多面体的所有顶点与截顶大十二面体、大十二合三十二面体、均匀大斜方三十二面体、大斜方十二面体相同.

六联正五棱柱的对偶复合多面体是六联正五双棱锥 (图 103).

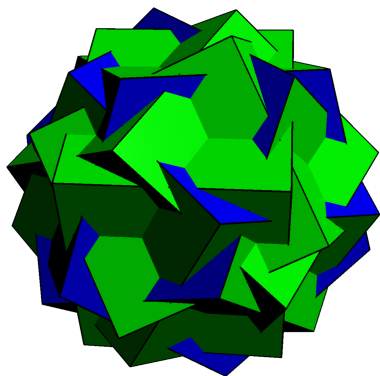


图 102

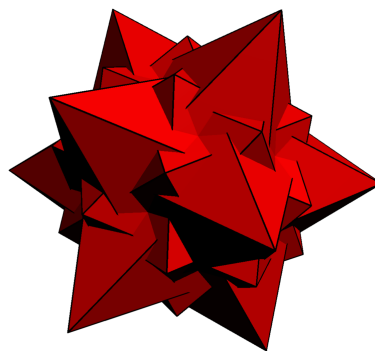


图 103

(35) 十二联正五棱柱

该复合多面体是将两个镜像全等的六联正五棱柱使每对正五边形所在面重合而构成 (图 104).

十二联正五棱柱的对偶复合多面体是十二联正五双棱锥 (图 105).

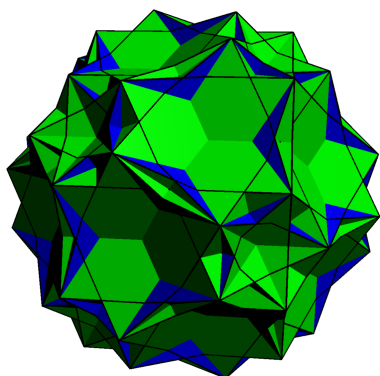


图 104

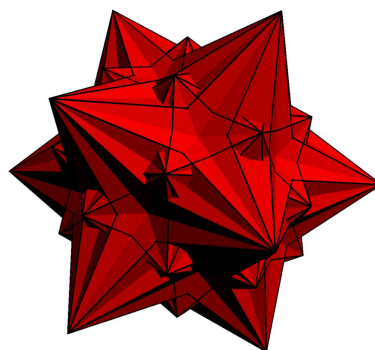


图 105

(36) 六联正五角星棱柱

该复合多面体是将六个正五角星棱柱放在具有正十二面体对称性的位置上而构成 (图 106). 该复合多面体的所有顶点与小斜棱正十二面体的顶点相同.

六联正五角星棱柱的对偶复合多面体是六联正五角星双棱锥 (图 107).

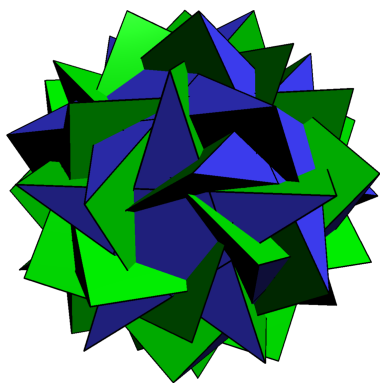


图 106

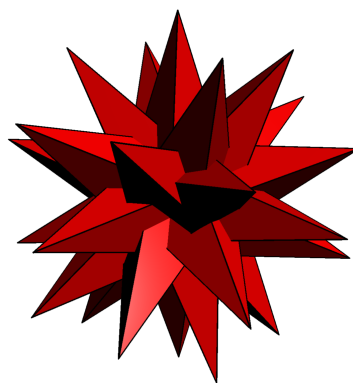


图 107

(37) 十二联正五角星棱柱

该复合多面体是将两个镜像全等的六联正五角星棱柱使每对正五角星所在面重合而构成 (图 108).
十二联正五角星棱柱的对偶复合多面体是十二联正五角星双棱锥 (图 109).

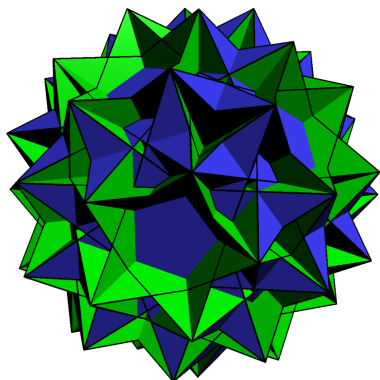


图 108



图 109

(38) 四联正六棱柱

该复合多面体是将四个正六棱柱放在具有正八面体对称性的位置上而构成 (图 110). 该复合多面体经过适当变换后可由如下的坐标及其全排列组成, \pm 号任意取:

$$(\pm 1, \pm(1 - \sqrt{6}), \pm(1 + \sqrt{6})).$$

四联正六棱柱的对偶复合多面体是四联正六双棱锥 (图 111).

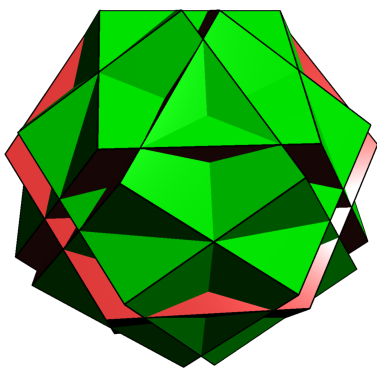


图 110

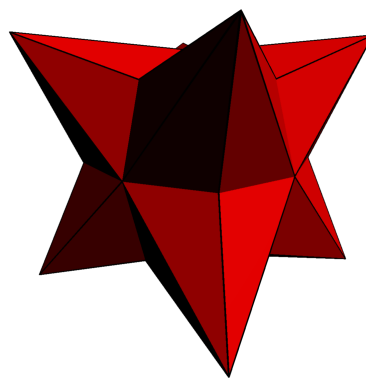


图 111

(39) 十联正六棱柱

该复合多面体是将十个正六棱柱放在具有正二十面体对称性的位置上而构成 (图 112). 该复合多面体经过适当变换后可由如下的坐标及其循环排列组成, \pm 号任意取:

$$\begin{aligned} &(\pm\sqrt{3}, \pm(\rho^{-1} - \rho\sqrt{3}), \pm(\rho + \rho^{-1}\sqrt{3})), \\ &(\pm 2\sqrt{3}, \pm\rho^{-1}, \pm\rho), \\ &(\pm(1 + \sqrt{3}), \pm(1 - \rho\sqrt{3}), \pm(1 + \rho^{-1}\sqrt{3})), \\ &(\pm(\rho - \rho^{-1}\sqrt{3}), \pm\sqrt{3}, \pm(\rho^{-1} + \rho\sqrt{3})), \\ &(\pm(1 - \rho^{-1}\sqrt{3}), \pm(1 - \sqrt{3}), \pm(1 + \rho\sqrt{3})), \end{aligned}$$

其中 $\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率.

十联正六棱柱的对偶复合多面体是十联正六双棱锥 (图 113).

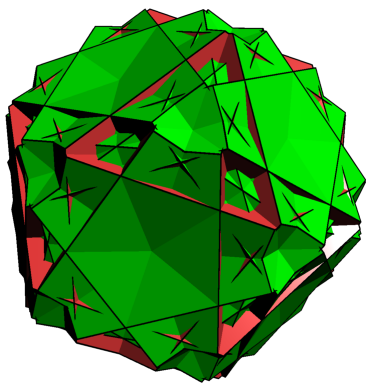


图 112

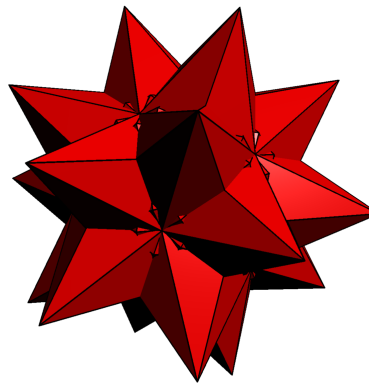


图 113

(40) 六联正十棱柱

该复合多面体是将六个正十棱柱放在具有正十二面体对称性的位置上而构成 (图 114). 该复合多面体经过适当变换后可由如下的坐标及其循环排列组成, \pm 号任意取:

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}}, \pm 2\rho, \pm\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} \right),$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\pm \left(\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} - \rho^2 \right), \pm 1, \pm \left(\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} + \rho \right) \right), \\
 & \left(\pm \left(\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} - \rho \right), \pm \rho^2, \pm \left(\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} + 1 \right) \right), \\
 & \left(\pm \left(\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} + \rho \right), \pm \rho^2, \pm \left(\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} - 1 \right) \right), \\
 & \left(\pm \left(\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} + \rho^2 \right), \pm 1, \pm \left(\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} - \rho \right) \right),
 \end{aligned}$$

其中 $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率.

六联正十棱柱的对偶复合多面体是六联正十双棱锥 (图 115).

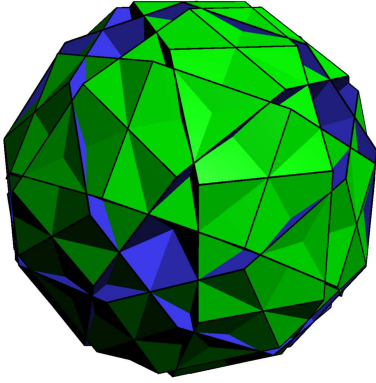


图 114

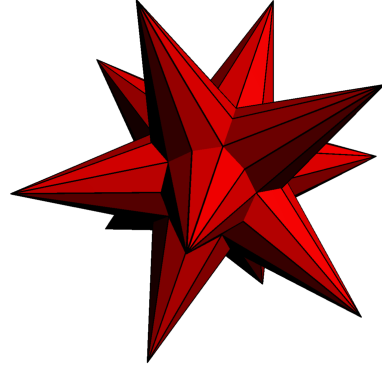


图 115

(41) 六联正十角星棱柱

该复合多面体是将六个正十角星 ($\frac{10}{3}$) 棱柱放在具有正十二面体对称性的位置上而构成 (图 116).

该复合多面体经过适当变换后可由如下的坐标及其循环排列组成, \pm 号任意取:

$$\begin{aligned}
 & \left(\pm \sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}}, \pm 2\rho^{-1}, \pm \sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} \right), \\
 & \left(\pm \left(\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} + \rho^{-2} \right), \pm 1, \pm \left(\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} - \rho^{-1} \right) \right), \\
 & \left(\pm \left(\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} - \rho^{-1} \right), \pm \rho^{-2}, \pm \left(\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} + 1 \right) \right), \\
 & \left(\pm \left(\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} + \rho^{-1} \right), \pm \rho^{-2}, \pm \left(\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} - 1 \right) \right), \\
 & \left(\pm \left(\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{5}}} - \rho^{-2} \right), \pm 1, \pm \left(\sqrt{\frac{\rho^{-1}}{\sqrt{5}}} + \rho^{-1} \right) \right),
 \end{aligned}$$

其中 $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率.

六联正十角星棱柱的对偶复合多面体是六联正十角星双棱锥（图 117）.

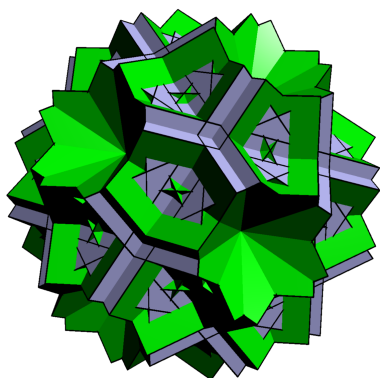


图 116

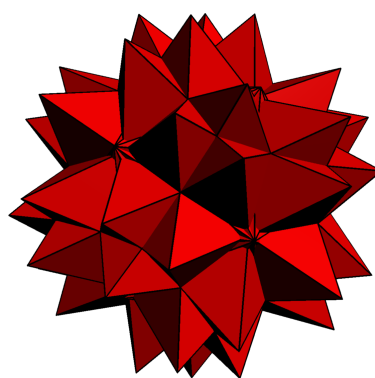


图 117

(42) 三联正四反柱

该复合多面体是将三个正四反柱放在具有正方体对称性的位置上而构成（图 118）. 该复合多面体经过适当变换后，其所有顶点由下面的点构成，其中原坐标经过奇数次排列后前面的 \pm 的负号共有奇数个，偶数次排列后前面的 \pm 的负号共有偶数个：

$$\left(\pm\sqrt{\sqrt{2}+1}, \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}, \pm 1 \right).$$

三联正四反柱的对偶复合多面体是三联正四偏方体（图 119）.

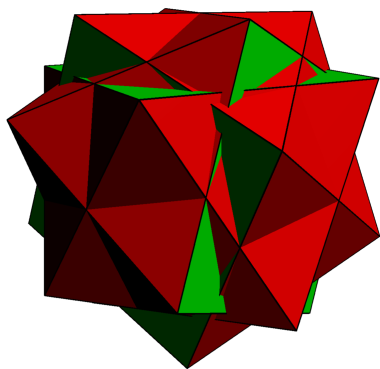


图 118

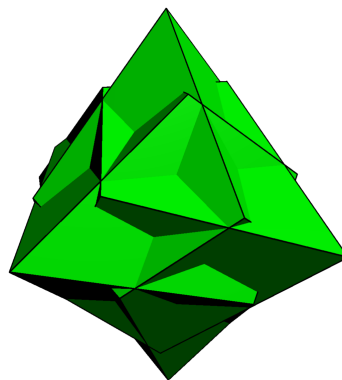


图 119

(43) 六联正四反柱

该复合多面体是将两个镜像全等的三联正四反柱使每对正方形所在面重合而构成（图 120）.

六联正四反柱的对偶复合多面体是六联正四偏方体（图 121）.

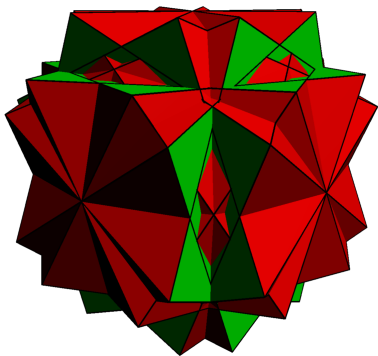


图 120

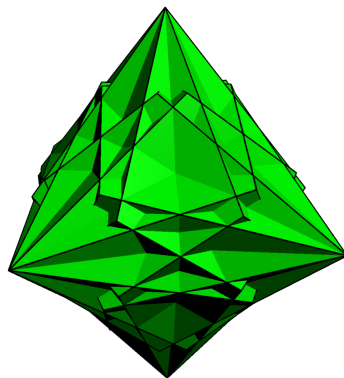


图 121

(44) 六联正五角星反柱

该复合多面体是将六个正五角星反柱放在具有正十二体对称性的位置上而构成 (图 122). 该复合多面体经过适当变换后, 其所有顶点由下面的点及其循环排列组成, \pm 中的负号共有偶数个:

$$\begin{aligned} &(\pm(\rho + \sqrt{\rho^{-1}}), \pm\rho^{-1}, \pm(-1 + \sqrt{\rho})), \\ &(\pm\sqrt{\rho^{-1}}, \pm 2, \pm\sqrt{\rho}), \\ &(\pm(-\rho + \sqrt{\rho^{-1}}), \pm\rho^{-1}, \pm(1 + \sqrt{\rho})), \\ &(\pm(-1 + \sqrt{\rho^{-1}}), \pm(-\rho), \pm(\rho^{-1} + \sqrt{\rho})), \\ &(\pm(1 + \sqrt{\rho^{-1}}), \pm(-\rho), \pm(-\rho^{-1} + \sqrt{\rho})), \end{aligned}$$

其中 $\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率.

六联正五角星反柱的对偶复合多面体是六联正五角星偏方体 (图 123).

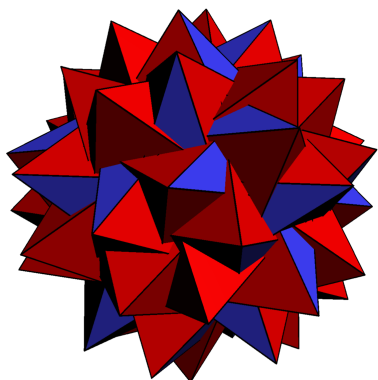


图 122

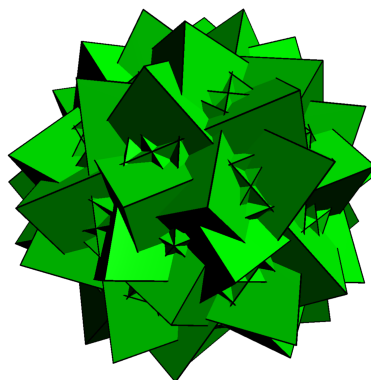


图 123

(45) 十二联正五角星反柱

该复合多面体是将两个镜像全等的六联正五角星反柱使每对正五角星所在面重合而构成 (图 124). 十二联正五角星反柱的对偶复合多面体是十二联正五角星偏方体 (图 125).

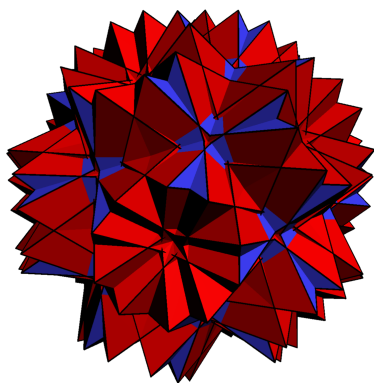


图 124

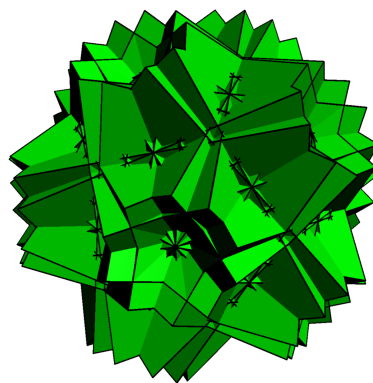


图 125

(46) 二联正二十面体

该复合多面体是将正二十面体 I_1 绕一面中心与其中心连线的直线旋转后形成正二十面体 I_2 , 使这个面的三个顶点与旋转 $\arccos \frac{3\sqrt{5}-1}{8}$ 后的三个顶点共六个顶点构成内角都是 120° , 长边与短边长度比是 $(1+\sqrt{5}):2$ 的凸六边形, I_1 、 I_2 所构成的复合多面体 (图 126). 该复合多面体具有正八面体的对称性, 经过适当变换后, 其所有顶点由下面的点及其全排列组成, \pm 中的符号任意取:

$$(\pm 1, 0, \pm \rho),$$

其中 $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率.

二联正二十面体的对偶复合多面体是二联正十二面体 (图 127).

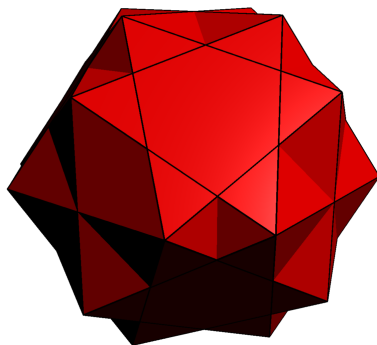


图 126

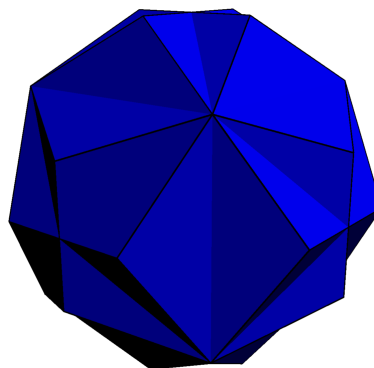


图 127

(47) 五联正二十面体

该复合多面体是将五个正二十面体放在具有正二十面体对称性的位置构成 (图 128). 该复合多面体有 40 个正三角形形成 20 对共面, 经过适当变换后, 其所有顶点由下面的点及其循环排列组成, \pm 中的符号任意取:

$$\begin{aligned} &(0, \pm 2, \pm 2\rho), \\ &(\pm \rho^{-1}, \pm 1, \pm (1 + \rho^2)), \\ &(\pm \rho, \pm \rho^2, \pm (2\rho - 1)), \end{aligned}$$

其中 $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率.

五联正二十面体的对偶复合多面体是五联正十二面体 (图 129).

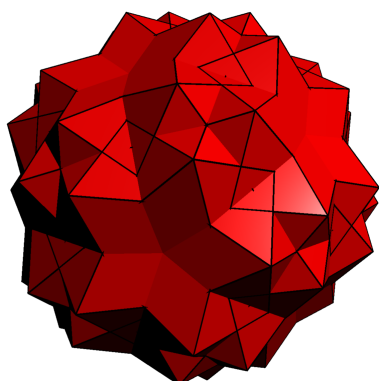


图 128

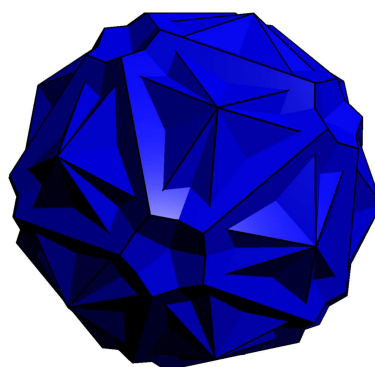


图 129

(48) 二联大正十二面体

该复合多面体在二联正二十面体内的正二十面体各自构造大正十二面体而构成的 (图 130).

二联大正十二面体的对偶复合多面体是二联小星状正十二面体 (图 132).

(49) 五联大正十二面体

该复合多面体在五联正二十面体内的正二十面体各自构造大正十二面体而构成的 (图 131).

五联大正十二面体的对偶复合多面体是五联小星状正十二面体 (图 133).

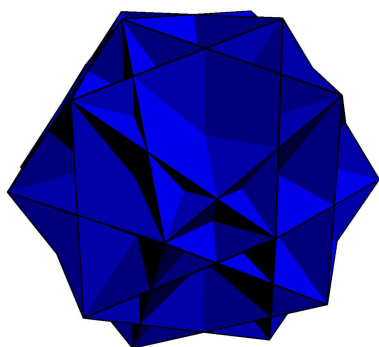


图 130

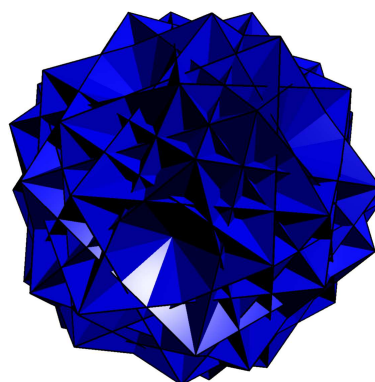


图 131

(50) 二联小星状正十二面体

该复合多面体在二联正二十面体内的正二十面体各自构造小星状正十二面体而构成的 (图 132).

二联小星状正十二面体的对偶复合多面体是二联大正十二面体 (图 130).

(51) 五联小星状正十二面体

该复合多面体在五联正二十面体内的正二十面体各自构造小星状正十二面体而构成的 (图 133).

五联小星状正十二面体的对偶复合多面体是五联大正十二面体（图 131）。

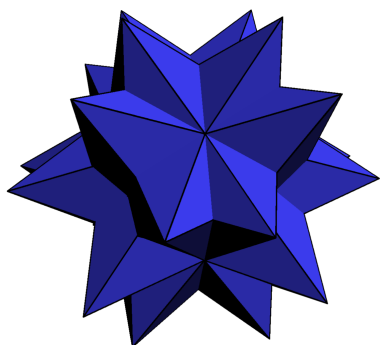


图 132

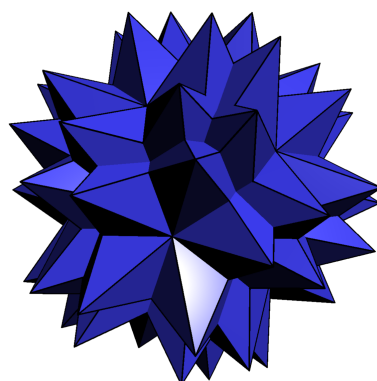


图 133

（ 52 ） 二联大正二十面体

该复合多面体在二联正二十面体内的正二十面体各自构造大正二十面体而构成的（图 134）。

二联大正二十面体的对偶复合多面体是二联大星状正十二面体（图 135）。

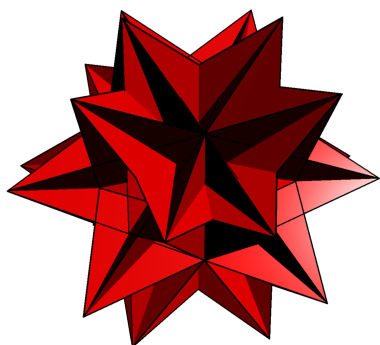


图 134

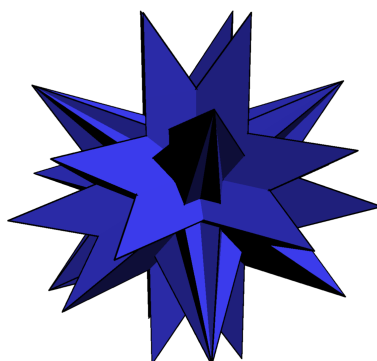


图 135

（ 53 ） 五联大正二十面体

该复合多面体在五联正二十面体内的正二十面体各自构造大正二十面体而构成的（图 136）。

五联大正二十面体的对偶复合多面体是五联大星状正十二面体（图 137）。

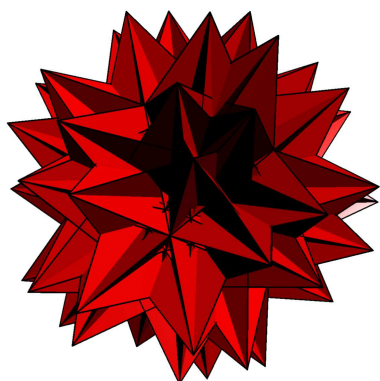


图 136

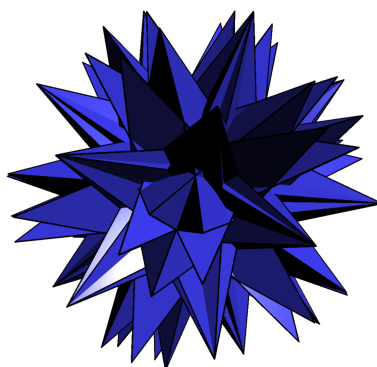


图 137

(54) 二联截顶正四面体

该复合多面体由两个重合的截顶正四面体其中一个绕另一个的中心到其中一个正六边形与正六边形面相交的边的中点旋转 90° 构成 (图 138).

二联截顶正四面体的对偶复合多面体是二联三角四面体 (图 139).

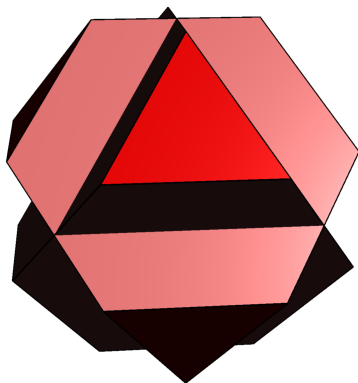


图 138

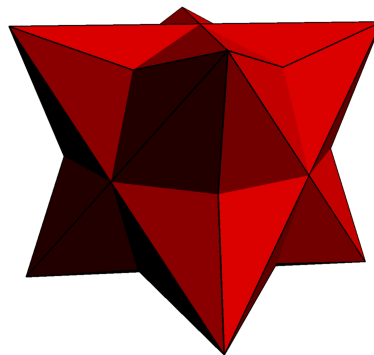


图 139

(55) 五联截顶正四面体

该复合多面体是在五联正四面体内部的每个正四面体构造截顶正四面体而成的 (图 140).

五联截顶正四面体的对偶复合多面体是五联三角四面体 (图 141).

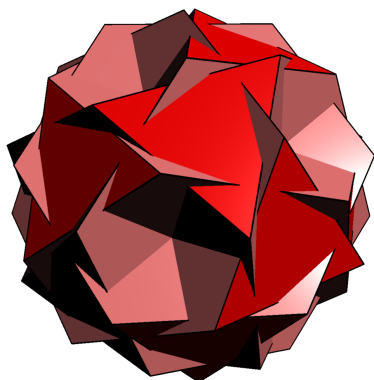


图 140

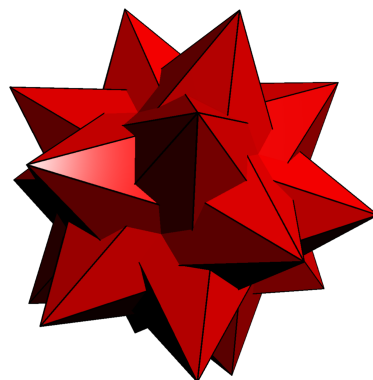


图 141

(56) 十联截顶正四面体

该复合多面体是在十联正四面体内部的每个正四面体构造截顶正四面体而成的 (图 142).

十联截顶正四面体的对偶复合多面体是十联三角四面体 (图 143).

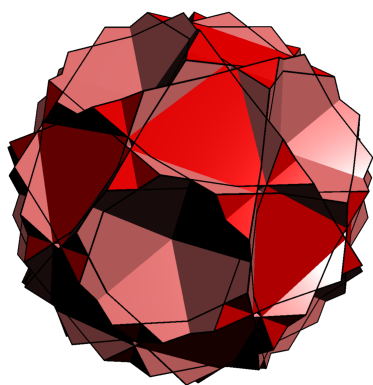


图 142

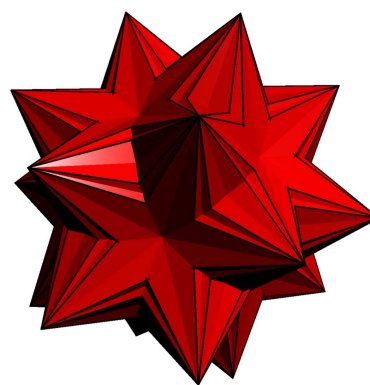


图 143

(57) 五联截顶正方体

该复合多面体是在五联正方体内部的每个正方体构造截顶正方体而成的 (图 144).
五联截顶正方体的对偶多面体是五联三角八面体 (图 145).

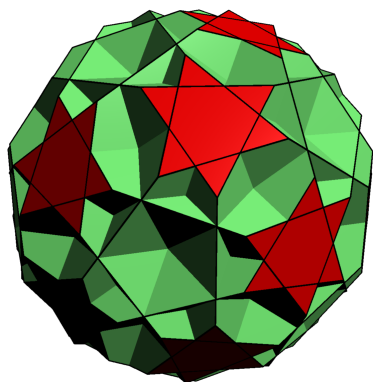


图 144

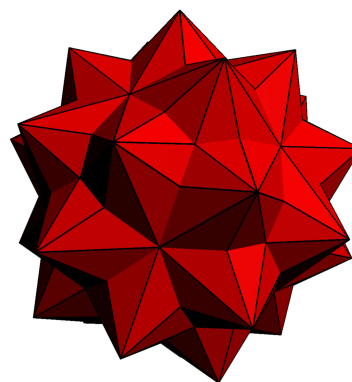


图 145

(58) 五联星状截顶六面体

该复合多面体是在五联正方体内部的每个正方体构造小削棱正方体，再在每个小削棱正方体内构造星状截顶六面体而成的 (图 146).

五联星状截顶六面体的对偶多面体是五联大皱面八面体 (图 147).

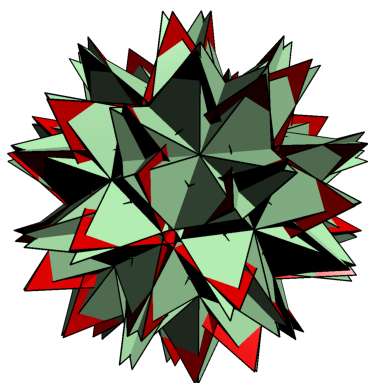


图 146

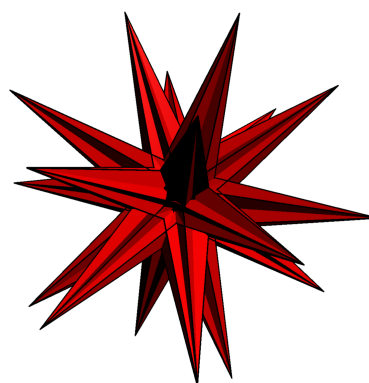


图 147

(59) 五联截半正方体

该复合多面体是将五个截半正方体放在具有正二十面体对称性的位置构成 (图 148). 该复合多面体有 40 个正三角形形成 20 对共面, 经过适当变换后, 其所有顶点由下面的点及其循环排列组成, \pm 中的符号任意取:

$$\begin{aligned} &(\pm 2, 0, \pm 2), \\ &(\pm \rho, \pm \rho^{-1}, \pm (2\rho - 1)), \\ &(\pm 1, \pm \rho^{-2}, \pm \rho^2), \end{aligned}$$

其中 $\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割率.

五联截半正方体的对偶复合多面体是五联菱形十二面体 (图 149).

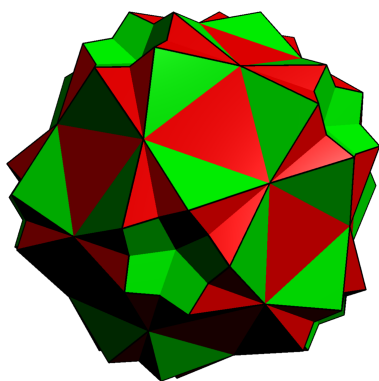


图 148

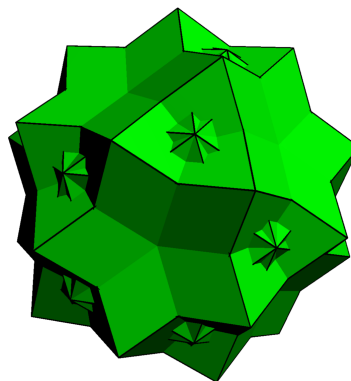


图 149

(60) 五联六合五面体

该复合多面体是将五联截半正方体内的每个截半正方体构造六合五面体而成的 (图 150).

五联六合五面体的对偶复合多面体是五联六合柱状化八面体 (图 151), 五联六合柱状化八面体的表面与五联八合柱状化八面体 (图 153) 的表面相同.

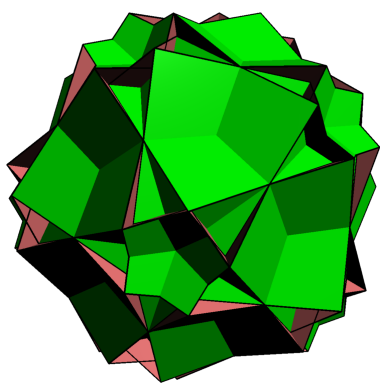


图 150

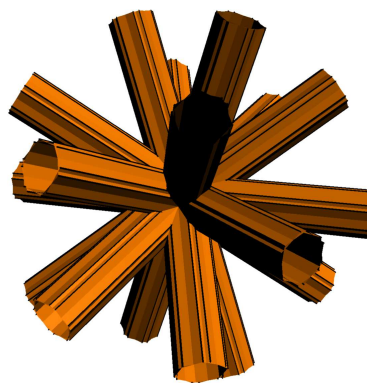


图 151

(61) 五联八合四面体

该复合多面体是将五联截半正方体内的每个截半正方体构造八合四面体而成的 (图 152).

五联八合四面体的对偶复合多面体是五联八合柱状化八面体 (图 153), 五联八合柱状化八面体的表面与五联六合柱状化八面体 (图 151) 的表面相同.

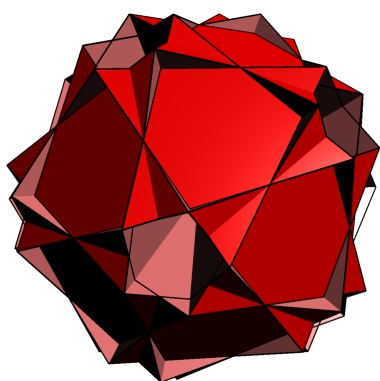


图 152

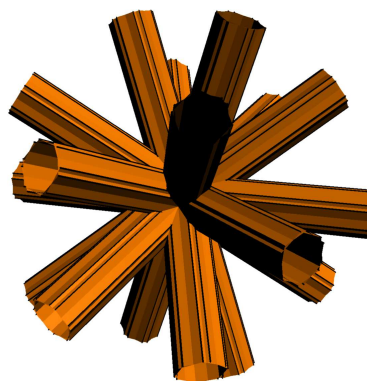


图 153

(62) 五联小削棱正方体

该复合多面体是在五联正方体内部的每个正方体构造小削棱正方体而成的 (图 154).

五联小削棱正方体的对偶复合多面体是五联斜方二十四面体 (图 155).

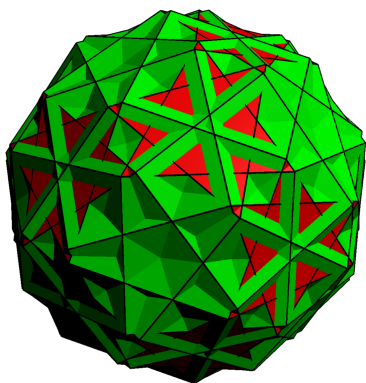


图 154

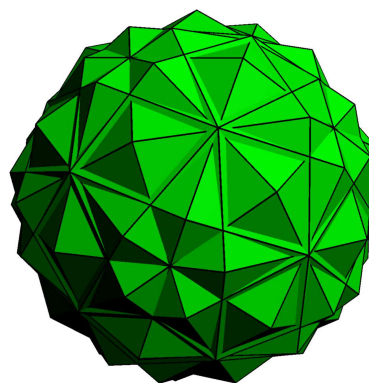


图 155

(63) 五联小斜方六面体

该复合多面体是由五联小削棱正方体里的每个小削棱正方体构造小斜方六面体而成的 (图 156).

五联小斜方六面体的对偶复合多面体是五联小自交斜方六面体 (图 157), 五联小自交斜方六面体的表面与五联小六合二十四面体 (图 159) 的表面相同.

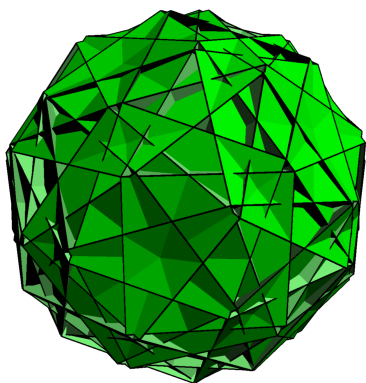


图 156

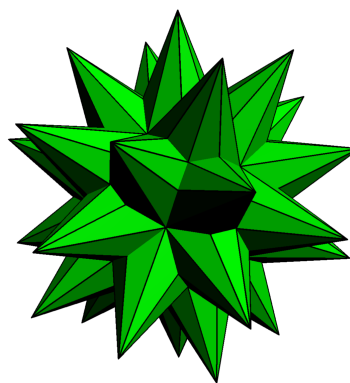


图 157

(64) 五联小立方截半正方体

该复合多面体是由五联小削棱正方体里的每个小削棱正方体构造小立方截半正方体而成的 (图 158).

五联小立方截半正方体的对偶复合多面体是五联小六合二十四面体 (图 159), 五联小六合二十四面体的表面与五联小自交斜方六面体 (图 157) 的表面相同.

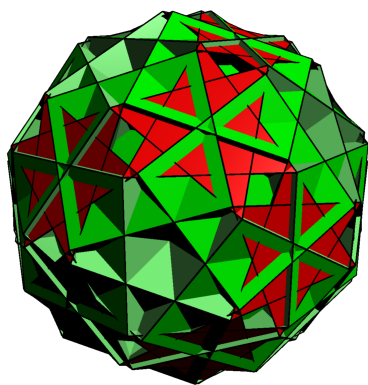


图 158

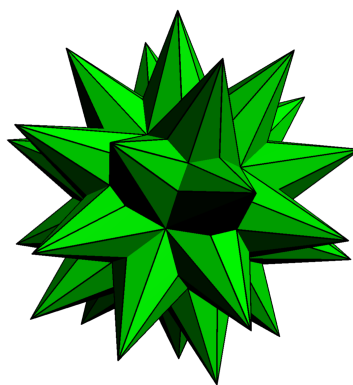


图 159

(65) 五联大立方截半正方体

该复合多面体是在五联截顶正方体内部的每个截顶正方体构造大立方截半正方体而成的 (图 160).
五联大立方截半正方体的对偶复合多面体是五联大六合二十四面体 (图 161).

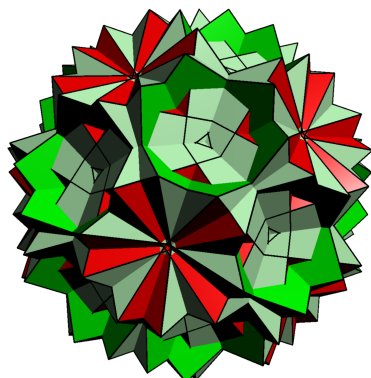


图 160

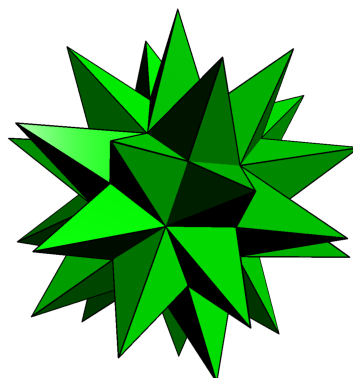


图 161

(66) 五联大斜方六面体

该复合多面体是由五联大立方截半正方体里的每个大立方截半正方体构造大斜方六面体而成的 (图 162).

五联大斜方六面体的对偶复合多面体是五联大自交斜方六面体 (图 163).

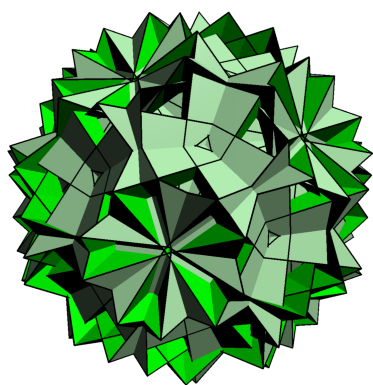


图 162

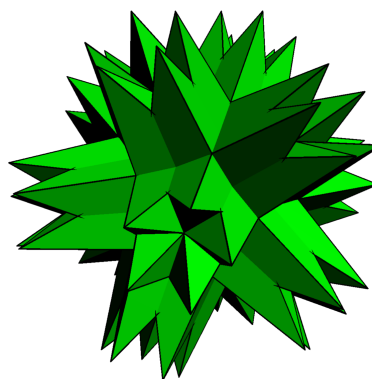


图 163

(67) 五联大均匀斜方截半正方体

该复合多面体是由五联大立方截半正方体里的每个大立方截半正方体构造大均匀斜方截半正方体而成的 (图 164).

五联大均匀斜方截半正方体的对偶复合多面体是五联大斜方二十四面体 (图 165).

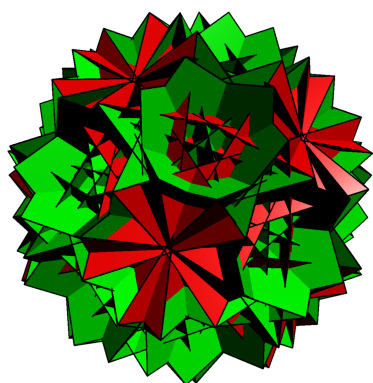


图 164

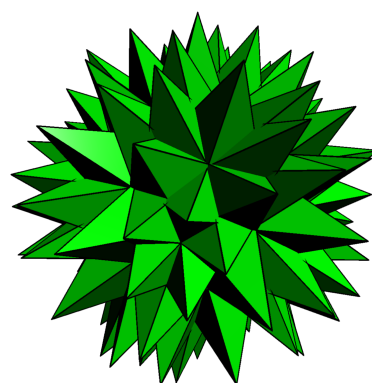


图 165

(68) 二联扭棱正方体

该复合多面体是由两个镜像全等的扭棱正方体使每对正方形所在面重合构造而成的 (图 166).

二联扭棱正方体的对偶复合多面体是二联五角二十四面体 (图 167).

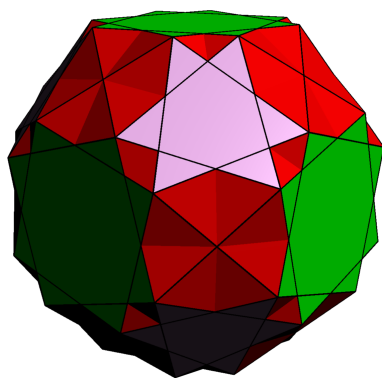


图 166

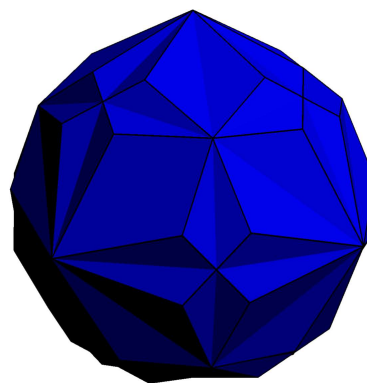


图 167

(69) 二联扭棱正十二面体

该复合多面体是由两个镜像全等的扭棱正十二面体使每对正五边形所在面重合构造而成的 (图 168).
二联扭棱正十二面体的对偶复合多面体是二联五角六十面体 (图 169).

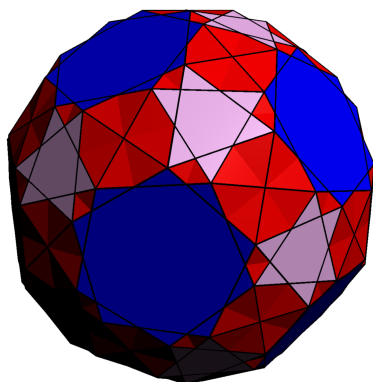


图 168

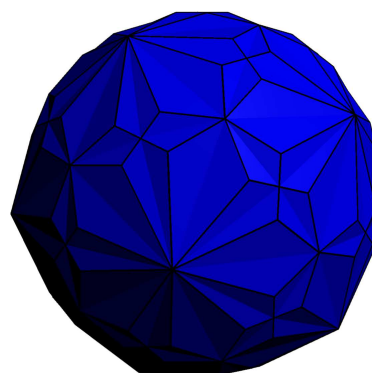


图 169

(70) 二联大扭棱三十二面体

该复合多面体是由两个镜像全等的大扭棱三十二面体使每对正五角星所在面重合构造而成的 (图 170).

二联大扭棱三十二面体的对偶复合多面体是二联大五角六十面体 (图 171).

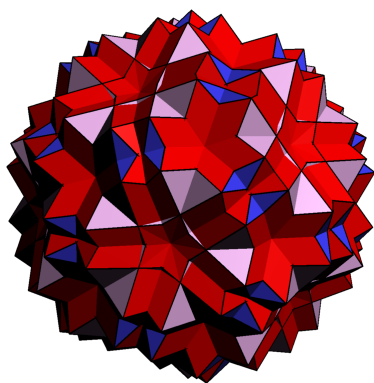


图 170

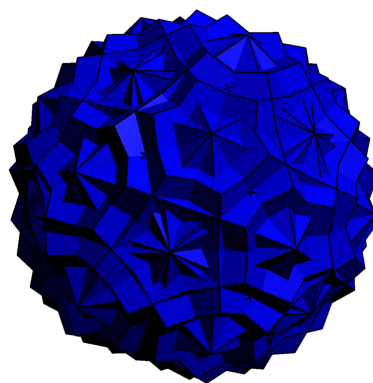


图 171

(71) 二联大反扭棱三十二面体

该复合多面体是由两个镜像全等的大反扭棱三十二面体使每对正五角星所在面重合构造而成的 (图 172).

二联大反扭棱三十二面体的对偶复合多面体是二联大反五角六十面体 (图 173).

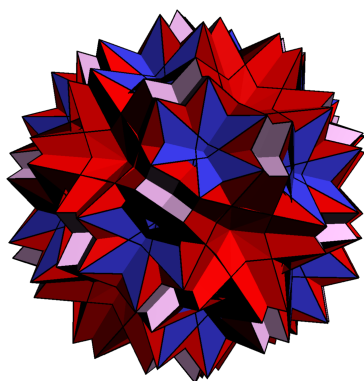


图 172

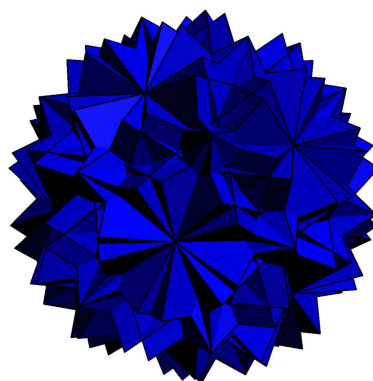


图 173

(72) 二联大后扭棱二十合三十二面体

该复合多面体是由两个镜像全等的大后扭棱二十合三十二面体使每对正五角星所在面重合构造而成的 (图 174).

二联大后扭棱二十合三十二面体的对偶复合多面体是二联大五角星六十面体 (图 175).

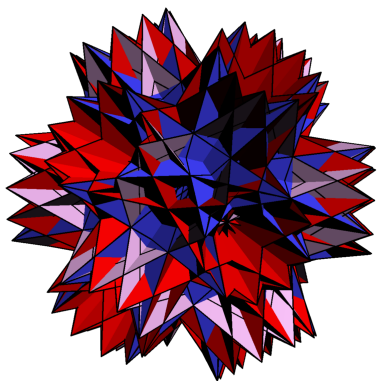


图 174

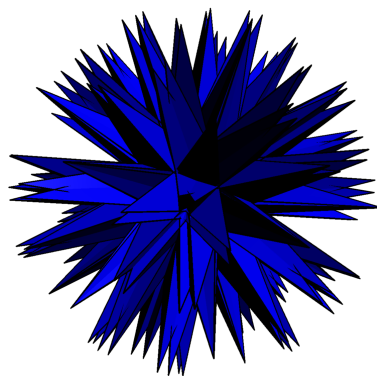


图 175

(73) 二联扭棱十二合十二面体

该复合多面体是由两个镜像全等的扭棱十二合十二面体使每对正五角星所在面重合构造而成的 (图 176).

二联扭棱十二合十二面体的对偶复合多面体是二联内五角六十面体 (图 177).

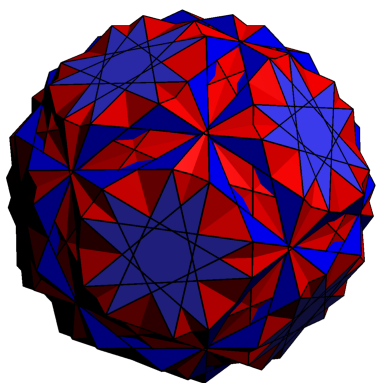


图 176

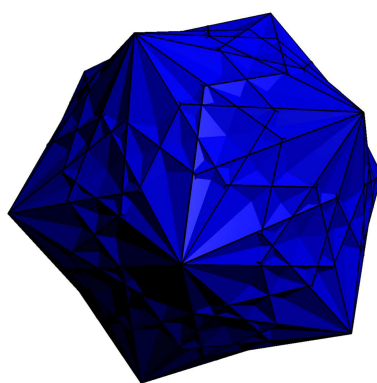


图 177

(74) 二联反扭棱十二合十二面体

该复合多面体是由两个镜像全等的反扭棱十二合十二面体使每对正五角星所在面重合构造而成的 (图 178).

二联反扭棱十二合十二面体的对偶复合多面体是二联内反五角六十面体 (图 179).

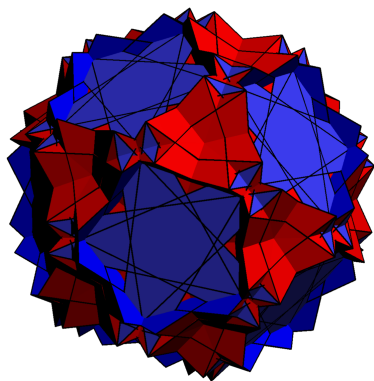


图 178

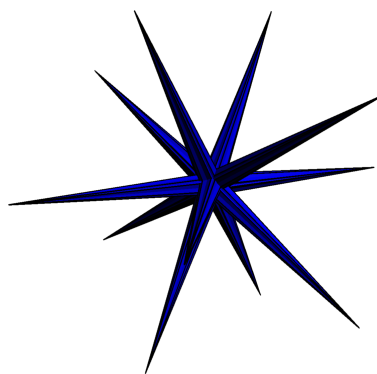


图 179

(75) 二联扭棱三十二合十二面体

该复合多面体是由两个镜像全等的扭棱三十二合十二面体使每对正五角星所在面重合构造而成的 (图 180).

二联扭棱三十二合十二面体的对偶复合多面体是二联内六角六十面体 (图 181).

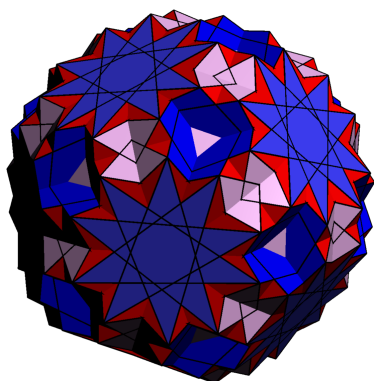


图 180



图 181

特例：二联大扭棱十二合三十二面体

该复合多面体是由两个镜像全等的大扭棱十二合三十二面体使每对正五角星重合构造而成的 (图 182). 因为该复合多面体的对应的五角星都是完全重合的, 因此不算作均匀复合多面体.

二联扭棱三十二合十二面体把正五角星全部除去后, 剩下的三角形面便构成了二十联正八面体.

二联大扭棱十二合三十二面体的对偶复合多面体是二联大六角六十面体 (图 183), 二联大扭棱十二合三十二面体的外表与二十联正方体的表面相同 (图 40).

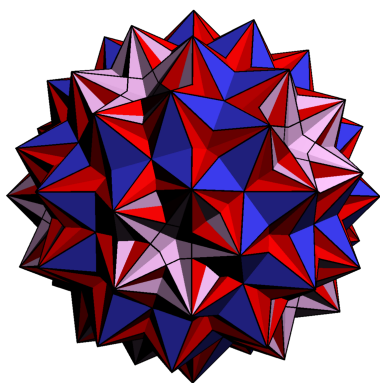


图 182

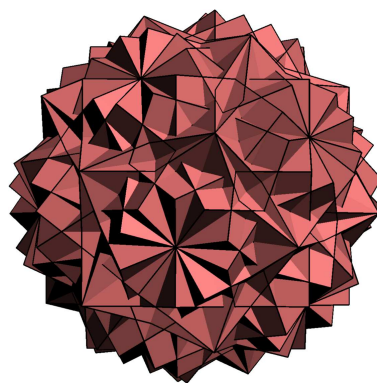


图 183